Über die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes heterogener Flüssigkeiten von der Konzentration an Zusatzteilchen, die von der gleichen Größenordnung sind wie der Rohrdurchmesser

Inaugural-Dissertation,

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz

zur Erlangung der Doktorwürde vorgelegt von

Jules Züger

von Richterswil (Zürich)

1948

Über die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes heterogener Flüssigkeiten von der Konzentration an Zusatzteilchen, die von der gleichen Größenordnung sind wie der Rohrdurchmesser

Inaugural-Dissertation,

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz

zur Erlangung der Doktorwürde vorgelegt von

Jules Züger

von Richterswil (Zürich)

Auf Antrag der Herren Professoren A. Müller und F. Dessauer von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz angenommen.

Freiburg 1948. Der Dekan: Prof. L. Weber.

I. Einleitung und Aufgabe dieser Arbeit

Bei der Erforschung der Energieverluste in den einzelnen Kreislaufabschnitten stößt man auf eine große Schwierigkeit, sobald man sich den Kapillaren zuwenden will. Es gelingt kaum, Blut durch kleinere Kapillaren als solche von 50 μ Durchmesser zum Strömen zu bringen. Aber gerade die Kenntnis der Verhältnisse im Kapillarkreislauf ist von besonderem Interesse, sind doch die Kapillaren im allgemeinen so eng, daß gerade nur noch ein Erythrocyt im Kapillarquerschnitt Platz hat, oder die Kapillaren können sogar noch enger werden als der größte Durchmesser der Erythrocyten. Unwillkürlich erhält man die Vorstellung, daß dabei der Strömungswiderstand im Vergleich mit den weiteren Gefäßen sehr groß sein wird, und somit der Kapillarabschnitt des Kreislaufes die Hauptbelastung für das Herz darstellen wird.

Um Klarheit über diesen Punkt zu schaffen, wurde ein Modellversuch mit einer Makroemulsion angestellt. Es handelte sich also um die Untersuchung des Einflusses makroskopischer Teilchen, die in eine strömende Flüssigkeit suspendiert wurden, auf denjenigen Anteil der Strömungsenergie, der durch die innere Reibung der Flüssigkeit in Dissipationswärme übergeht. Je nachdem mehr oder weniger Teilchen suspendiert wurden, erhielt man eine heterogene Flüssigkeit von größerer oder kleinerer Konzentration an Teilchen. Es wurde die qualitative und quantitative Abhängigkeit des Energieverbrauches von der Konzentration untersucht.

Es handelte sich bei der Flüssigkeit um ein Wasser-Glycerin-Gemisch, das durch eine horizontal angeordnete Glasröhre strömte. Durch eine spezielle Einrichtung war es möglich, in die Strömung in regelmäßigen Abständen kleine Quanten einer hydrophoben Flüssigkeit zu bringen. Dank einer genügend großen Grenzflächenspannung mischten sich die beiden Flüssigkeiten nicht miteinander. Das hydrophobe Öl nahm wegen der Kohäsion Kugelform an. Diese Kugeln stellten mit dem Wasser-Glycerin-Gemisch zusammen die heterogene Flüssigkeit dar, die, wenn sie durch die Versuchsröhre getrieben wurde, der treibenden Kraft einen ganz bestimmten Widerstand entgegensetzte. Die Bestimmung dieses Widerstandes war die Aufgabe dieser Arbeit.

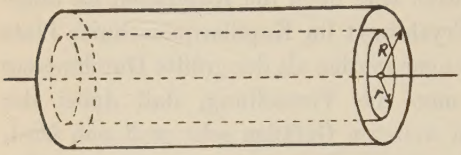
Die Durchmesser der Ölkugeln wurden etwas kleiner gewählt als der Rohrdurchmesser.

Durch Variation der Anzahl der Kugeln, die während einer bestimmten Zeit der Strömung zugegeben wurden, erhielt man nach Belieben eine Variation der Konzentration, das heißt des prozentualen Anteils des Ölvolumens zum Gesamtvolumen.

Ableitung und Gültigkeitsbereich des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes.

Die Grundlage für die Meßmethode dieser Arbeit bildet das Poiseuille'sche Gesetz, eine von Poiseuille empirisch gefundene Beziehung, nach der das sekundlich durch eine Röhre fließende Flüssigkeitsvolumen direkt proportional ist der Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende der Röhre und der vierten Potenz des Röhrenradius und umgekehrt proportional der Länge der Röhre und der Zähigkeit der Flüssigkeit[1]).

Zur Ableitung dieses Gesetzes wird angenommen, daß jedes Teilchen der strömenden Flüssigkeit sich parallel zur Röhrenachse mit konstanter Geschwindigkeit u bewegt. Alle Teilchen, die sich auf einem mit der Röhre coaxialen Kreiszylinder befinden, haben aus Symmetriegründen die gleiche Geschwindigkeit.



Betrachten wir einen solchen Zylinder vom Radius r. Durch den Überdruck auf der einen Seite der Röhre wirkt auf diesen Zylinder die Kraft:

$$\pi r^2 (p_1 — p_2)$$

Wegen der Viskosität der Flüssigkeit greift an der Mantelfläche des Zylinders eine hemmende Kraft an.

Nach Newton ist die Reibung zweier parallel strömender Flüssigkeitsschichten mit dem Abstande dx und der Geschwindigkeitsdifferenz du proportional der Reibungsfläche und dem Geschwindigkeitsgefälle, also

$$K = F \mu \frac{du}{dx} \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor μ wird Zähigkeitskoeffizient genannt.

In unserem Falle wirkt also auf die betrachtete Zylindermantelfläche die Kraft:

$$2 \pi r l \mu \frac{du}{dx}$$

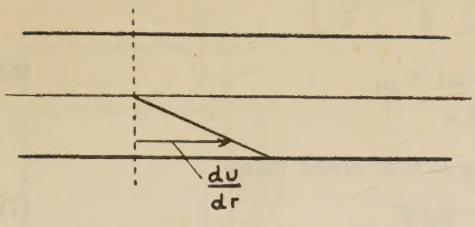
Für den Fall der stationären Strömung, das heißt für die Strömung, bei der weder eine Beschleunigung noch eine Verzögerung durch die beteiligten Kräfte verursacht wird, ist nötig, daß sich diese beiden Kräfte gegenseitig aufheben. Es gilt also die Gleichung:

$$\pi r^2 (p_1 — p_2) = — 2 \pi r l \mu \frac{du}{dr} \tag{2}$$

---

[1]) Da im letzten Abschnitt dieser Arbeit auf die Ableitung der Poiseuille'schen Gleichung zurückgegriffen werden muß, wurde sie hier kurz abgeleitet, um demjenigen Leser, der mit dem Stoff weniger vertraut ist, die Sache zu erleichtern.

Daraus folgt:



$$\frac{du}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\,l\,\mu}\,r \tag{3}$$

Das Geschwindigkeitsgefälle ist somit eine lineare Funktion des Radius undnimmt in der Achse der Röhre den Wert Null an.

Die Integration der letzten Gleichung gibt die Formel für die Geschwindigkeit:

$$u = \frac{(p_1 - p_2)\,r^2}{4\,l\,\mu} + C$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C macht man die Annahme, daß die direkt an der Rohrwand anliegende Flüssigkeitsschicht an dieser festhaftet. Es ergibt sich daraus die Randbedingung:

$$u = O \quad \text{für} \quad r = R$$

Daraus folgt:

$$O = -\frac{(p_1 - p_2)\,R^2}{4\,l\,\mu} + C$$

$$C = \frac{(p_1 - p_2)\,R^2}{4\,l\,\mu}$$

Die Geschwindigkeit wird also schließlich durch die Formel:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\,l\,\mu}\,(R^2 - r^2) \tag{4}$$

bestimmt für jeden Punkt, der sich im Abstande r von der Röhrenachse befindet.

Die letzte Gleichung stellt eine Parabel dar. Die Geschwindigkeit wird ein Maximum für $r = O$, das heißt in der Rohrachse herrscht bei dieser Strömungsart die größte Geschwindigkeit. Gegen die Wand hin nimmt sie stetig ab nach der Form einer Parabel, um an der Rohrwand selbst den Wert Null anzunehmen.

Das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen wird dargestellt durch den Körperinhalt des Rotationsparaboloids, das entsteht, wenn obige Parabel um die Röhrenachse rotiert.

Das Volumen des Rotationsparaboloids ist:

$$V = 2\,\pi \int_O^R u\,r\,dr \tag{5}$$

Den Wert für u eingesetzt ergibt:

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\,\pi}{2\,l\,\mu} \int_O^R (R^2 - r^2)\,r\,dr$$

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\,\pi}{2\,l\,\mu}\left[\frac{R^2\,r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]$$

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\,\pi}{8\,l\,\mu}\,R^4 \tag{6}$$

Oder durch Einführung des Querschnittes $q = \pi\,R^2$ erhält man:

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\,q^2}{8\,l\,\mu\,\pi} \tag{7}$$

V ist das in der Zeiteinheit durchfließende Flüssigkeitsvolumen. Für die Zeit t ergibt sich somit die Flüssigkeitsmenge:

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\,q^2}{8\,l\,\mu\,\pi}\,t \tag{8}$$

Kommt der Überdruck dadurch zustande, daß auf der einen Seite der Röhre das Reservoir der Flüssigkeit eine Niveauhöhe h über dem Rohrende hat, und erfolgt der Ausfluß ins Freie, so braucht der Atmosphärendruck, da er ja auf beiden Seiten wirkt, nicht berücksichtigt zu werden. Es ist dann:

$$p_1 = \varrho\,g\,h \quad \text{und} \quad p_2 = 0 \tag{9}$$

und obige Gleichung geht über in:

$$V = \frac{\varrho\,g\,h\,q^2\,t}{8\,l\,\mu\,\pi}$$

oder:

$$V = \frac{g}{8\,\pi}\,\frac{q^2}{l}\,\frac{\varrho\,h\,t}{\mu} \tag{10}$$

Nach μ aufgelöst folgt:

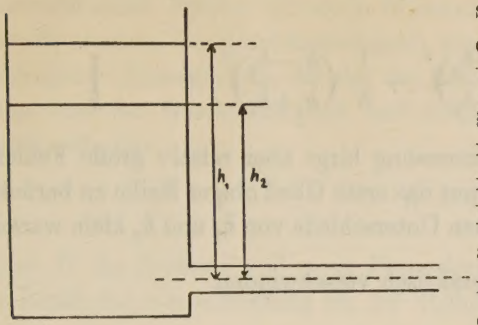
$$\mu = \frac{g}{8\,\pi}\,\frac{q^2}{l}\,\frac{\varrho\,h\,t}{V} \tag{11}$$

Der Wert $\frac{g}{8\,\pi}\,\frac{q^2}{l}$ ist also für eine und dieselbe Röhre eine Konstante K, so daß man schließlich folgende Formel erhält:

$$\boxed{\mu = K\,\frac{\varrho\,h\,t}{V}} \tag{12}$$

Dies ist die Formel, welche in dieser Arbeit zur Berechnung des Viskositätskoeffizienten benützt wurde. Es ist somit die Ermittlung des Ausflußvolumens V während einer gemessenen Zeit t bei einer bestimmten Druckhöhe h erforderlich.

Es bleibt noch abzuklären, welcher Wert für h einzusetzen ist. In der Poiseuille'schen Gleichung wird die wirksame Druckdifferenz als konstant angenommen. In Wirklichkeit ändert der Druck bei der angewandten Methode. Dadurch, daß während einer Messung Flüssigkeit ausfließt, fällt das Niveau und damit der wirksame Druck nach einem bestimmten Gesetze ab. Die Poiseuille'sche Gleichung gilt also nur für eine kleine Zeit dt. Das Volumen, das in dieser Zeit ausfließt, beträgt:



$$d\,V = \frac{g\,q^2\,\varrho\,h}{8\,\pi\,l\,\mu}\,dt$$

oder

$$d\,V = K\,\frac{\varrho\,h}{\mu}\,dt$$

Das Reservoir habe der Querschnitt Q. Dann gilt:

$$V = Q\,(h_1 - h_2) \qquad (13)$$

$$d\,V = Q\,d\,h$$

Oben eingesetzt:

$$Q\,d\,h = K\,\frac{\varrho\,h}{\mu}\,dt$$

$$Q\,\frac{d\,h}{h} = K\,\frac{\varrho}{\mu}\,dt$$

$$\int_{h_2}^{h_1} \frac{d\,h}{h} = K\,\frac{\varrho}{\mu}\int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$Q\,(ln\,h_1 - ln\,h_2) = K\,\frac{\varrho}{\mu}\,(t_2 - t_1) = K\,\frac{\varrho}{\mu}\,t$$

Q aus (13) eingesetzt:

$$\frac{V}{h_1 - h_2}\,ln\,\frac{h_1}{h_2} = K\,\frac{\varrho}{\mu}\,t$$

$$\mu = \frac{h_1 - h_2}{ln\,\dfrac{h_1}{h_2}}\,\frac{K\,\varrho\,t}{V} \qquad (14)$$

Für die wirksame Druckhöhe erhält man somit den Wert:

$$\frac{h_1 - h_2}{ln\,\dfrac{h_1}{h_2}} \qquad (15)$$

Die Reihenentwicklung von $ln \frac{h_1}{h_2}$ ergibt:

$$ln \frac{h_1}{h_2} = 2 \left[\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right)^5 + \dots \right]$$

Die angewandte Methode der Viskositätsmessung birgt aber relativ große Fehlermöglichkeiten in sich. Es genügt deshalb, nur das erste Glied obiger Reihe zu berücksichtigen, umsomehr als die vorgekommenen Unterschiede von h_1 und h_2 klein waren, so daß die höheren Potenzen von $\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}$ praktisch verschwinden.

Man kann also setzen:

$$ln \frac{h_1}{h_2} \sim 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}$$

Diesen Wert in (15) eingesetzt ergibt:

$$\frac{h_1 - h_2}{ln \frac{h_1}{h_2}} \sim \frac{h_1 - h_2}{2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}} = \frac{h_1 + h_2}{2} \tag{16}$$

Es wurden also bei allen Rechnungen das arithmetische Mittel aus h_1 und h_2 als wirksame Druckhöhe eingesetzt.

Berücksichtigt man in Formel (6) die Beziehung für das sekundliche Durchflußvolumen:

$$V = \pi r^2 \bar{u} \tag{17}$$

wobei $\bar{u}$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bedeutet, so erhält man unter Beachtung der Gleichungen (9) durch Auflösen nach h:

$$h = \frac{8}{\varrho g} \mu \frac{l \bar{u}}{r^2} \tag{18}$$

Durch diese Formel ist die Druckhöhe bestimmt, die für die Aufrechterhaltung einer Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u}$ durch eine gegebene Röhre nötig ist, falls μ die Viskosität der Flüssigkeit bedeutet.

Formel (18) ist gültig für die Laminärströmung homogener Flüssigkeiten mit Parabelprofil, bei der nur Bewegungen der Flüssigkeitsteilchen in Richtung der Rohrachse vorkommen.

Bei den heterogenen Flüssigkeiten steht man viel komplizierteren Verhältnissen gegenüber. Der Hauptströmung sind, auch bei noch so kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, verschiedene Bewegungen quer zur Rohrachse überlagert. Außerdem führen die Teilchen Rotationen aus.

Somit mußte ein Übergang von der für homogene Flüssigkeiten gültigen Poiseuille'schen Formel zu einer Gesetzmäßigkeit bei heterogenen Flüssigkeiten gesucht werden. Die Untersuchungen[1]) zeigten das Vorhandensein einer Strömung heterogener Flüssigkeiten, bei der die Reibung annähernd proportional der Rohrlänge und der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius ist, also

$$W = a \frac{l\,u}{r^2} \tag{19}$$

wobei W die Reibung und a ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Reibung W stellt die Kraft dar, die notwendig ist, die Strömung aufrecht zu erhalten, also

$$W = \varrho\, g\, h$$

Es ist somit:

$$h = k\, a \frac{l\,\bar{u}}{r^2} \tag{20}$$

Mit $a = \mu$ und $k = \dfrac{8}{\varrho\, g}$ ist diese Gleichung mit der für homogene Flüssigkeiten abgeleiteten (18) identisch. Der wesentliche Unterschied liegt darin, daß der Proportionalitätsfaktor a keine Konstante ist, wie bei den homogenen Flüssigkeiten, sondern von $\bar{u}$, μ, r, außerdem der Konzentration c und der Teilchenform z abhängt.

$$a = f(\bar{u}, \mu, r, c, z)$$

Formel (20) ist gültig für jene Strömungsart, die der Poiseuille'schen oder laminären Strömung homogener Flüssigkeiten entspricht. Weil aber die Bedingungen für Laminärströmung bei heterogenen Flüssigkeiten nicht mehr erfüllt sind, so spricht man hier von Newton'scher Strömung, da der Newton'sche Ansatz (1) immer noch gültig ist.

Der Tatsache, daß a keine Konstante mehr ist, wird dadurch Ausdruck verliehen, daß a durch μ' ersetzt wird, im Gegensatz zu μ bei homogenen Flüssigkeiten.

Ersetzt man in (20) die Faktoren k und a wie erwähnt, so erhält man unter Berücksichtigung von (17) durch Auflösen nach V:

$$V = \frac{\pi\, r^4\, \varrho\, g\, h}{8\, \mu'\, l} \tag{21}$$

eine dem Poiseuille'schen Gesetz analoge Formel, in der nur μ durch μ' ersetzt ist.

Dadurch erhält a, bzw. μ' die Bedeutung eines Ersatz-Reibungskoeffizienten oder scheinbaren Reibungskoeffizienten.

Die Gesamtreibung einer strömenden Flüssigkeit wird durch die Gegenwart der Zusatzteilchen heraufgesetzt. Die Strömungsgeschwindigkeit wird deshalb abnehmen. Soll die ursprüngliche Strömungsgeschwindigkeit aufrechterhalten bleiben, so muß

[1]) A. Müller, Arch. Kreislaufforschg 8, 270 (1941).

die Druckhöhe vergrößert werden. Man kann nun das heterogene Gemisch durch eine homogene Flüssigkeit ersetzt denken, die bei der gleichen Druckhöhe die gleiche Strömungsgeschwindigkeit erreichen würde. Die Poiseuille'sche Formel ergibt für diese Flüssigkeit eine gewisse Viskosität, die natürlich größer ist als die der ursprünglichen Flüssigkeit. Durch diesen Viskositätskoeffizienten wird nun die durch die Komplikation der Strömung auftretende Mehr-Reibung ausgedrückt. Diese Festsetzung kann man machen, wenn man sich klar ist darüber, daß also unter der „Viskosität" einer heterogenen Flüssigkeit die Viskosität jener homogenen Flüssigkeit angesehen werden muß, die bei der gleichen Druckhöhe die gleiche Strömungsgeschwindigkeit erreichen würde. Es gelingt somit, die Energieverluste einer strömenden heterogenen Flüssigkeit nach der gleichen Formel (18) zu berechnen wie bei den homogenen Flüssigkeiten, sobald man der heterogenen Flüssigkeit einen nicht reellen Viskositätskoeffizienten zuschreibt, der wiederum auf die gleiche Weise ermittelt wird wie derjenige homogener Flüssigkeiten. In diesem Sinne kann also von Zähigkeit heterogener Flüssigkeiten gesprochen werden, es ist dies nicht mehr und nicht weniger als eine Konvention.

Das Symbol μ' für den Ersatzkoeffizienten an Stelle von μ sorgt dafür, daß man sich immer bewußt bleibt, daß es sich hier nicht um die Zähigkeit im eigentlichen Sinne handelt.

Diese angestellten Überlegungen sollen die Erweiterung der Poiseuille'schen Formel für heterogene Flüssigkeiten rechtfertigen. Gleichung (21) kann nicht mathematisch abgeleitet werden, sondern es handelt sich um eine empirisch gefundene Formel.

Die Geschwindigkeitsverteilung wird durch die suspendierten Teilchen wesentlich beeinflußt, so daß das Parabelprofil nicht mehr möglich ist. Die Verteilung der Geschwindigkeiten bei Poiseuille'scher Strömung ist nach der Regel geordnet, mit möglichst kleinem Energieverbrauch eine möglichst große Leistung zu erzielen, eine in der Natur oft anzutreffende Gesetzmäßigkeit. Das Parabelprofil hat die Eigenschaft, bei gegebenen Bedingungen den Durchfluß einer möglichst großen Flüssigkeitsmenge mit einem Minimum von Energieaufwand zu erlauben. Die parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung ist also als ideale Ausbildung zu betrachten, so daß jede Abweichung davon einen vergrößerten Energieverbrauch beansprucht. Es wird ein größerer Teil der Strömungsenergie in Wärme umgewandelt. Die Vermehrung der Reibung ist also nicht durch eine eigentliche Zunahme der Zähigkeit bedingt, sondern sie muß einfach als Folge einer Störung der Strömung der Suspensionsflüssigkeit aufgefaßt werden.

μ' ist wie μ ein Proportionalitätsfaktor für die Reibung, der aber wie schon erwähnt ganz von den Bedingungen der Strömung abhängt.

Auf jedes Teilchen, das sich am Rohrrande befindet, wirkt beim Strömen eine Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung gegen die Achse hin[1]). Diese Kraft bewirkt

[1]) A. Müller, Arch. Kreislaufforschg **14**, 85 (1914).

bei der Strömung eine Erniedrigung der Konzentration der Suspension am Rande und eine Erhöhung derselben in der Rohrmitte. Da die Konzentrationsänderung von der Geschwindigkeit abhängt, so wird letztere auf μ' einen wesentlichen Einfluß haben.

Die Laminärströmung, die für die Ableitung des Poiseuille'schen Gesetzes vorausgesetzt wird, ist bekanntlich nur so lange möglich, als die kritische Geschwindigkeit nicht überschritten wird. Letztere läßt sich aus dem Reynolds'schen Ausdruck

$$R = \frac{\bar{u}\,\varrho\,r}{\mu} \tag{22}$$

ermitteln, wobei

$\bar{u}$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit,
ϱ die Dichte der Flüssigkeit,
μ der Viskositätskoeffizient der Flüssigkeit,
r der Radius der Röhre, und
R die Reynolds'sche Zahl bedeuten.

Ist die Reynolds'sche Zahl kleiner als 1100, so ist die Strömung laminär. Bei Reynolds'schen Zahlen über 2000 ist immer turbulente Strömung vorhanden. Dazwischen bildet sich die sogenannte Übergangsströmung aus.

Analog unterscheidet man bei heterogenen Flüssigkeiten Newton'sche Strömung und turbulente Strömung. Die Angabe der kritischen Reynolds'schen Zahlen ist zwar unbestimmter. Bei Versuchen von A. Müller[1]) betrug die niedrigste Reynolds'sche Zahl, bei der bereits Übergangsströmung eintrat $R = 700$.

Die Reynolds'schen Zahlen bewegten sich bei den vorliegenden Versuchen zwischen $R = 0{,}94$ und 34,2, so daß also nur Newton'sche Strömung vorhanden war.

Da, wie schon besprochen, μ' geschwindigkeitsabhängig ist, wurden die Geschwindigkeiten $\bar{u}$ bei jeder Messung einer Messerie auf einen konstanten Wert eingestellt.

Eine wesentliche Festsetzung für die Untersuchungen bestand darin, daß das Wasser-Glycerin-Gemisch und die Ölkugeln spezifisch gleichschwer gewählt werden sollten. Es handelte sich also um gleich schwere Kugeln, die in der Suspensionsflüssigkeit schwebten, im Gegensatz zu den Untersuchungen von P. Heinrich, der mit leichteren und schwereren Kugeln gearbeitet hatte.

[1]) A. Müller, Arch. Kreislaufforschg **8**, 278 (1941).

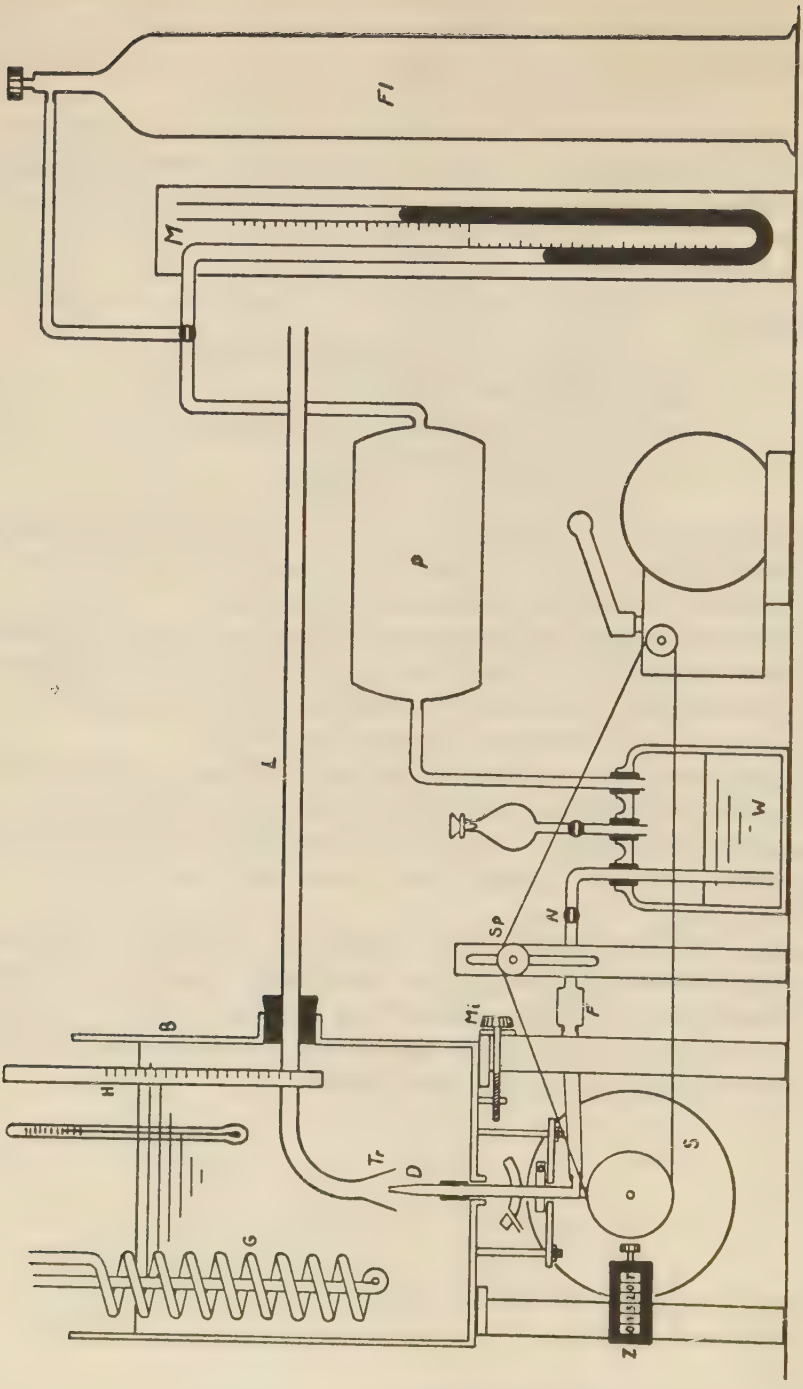


Fig. 1

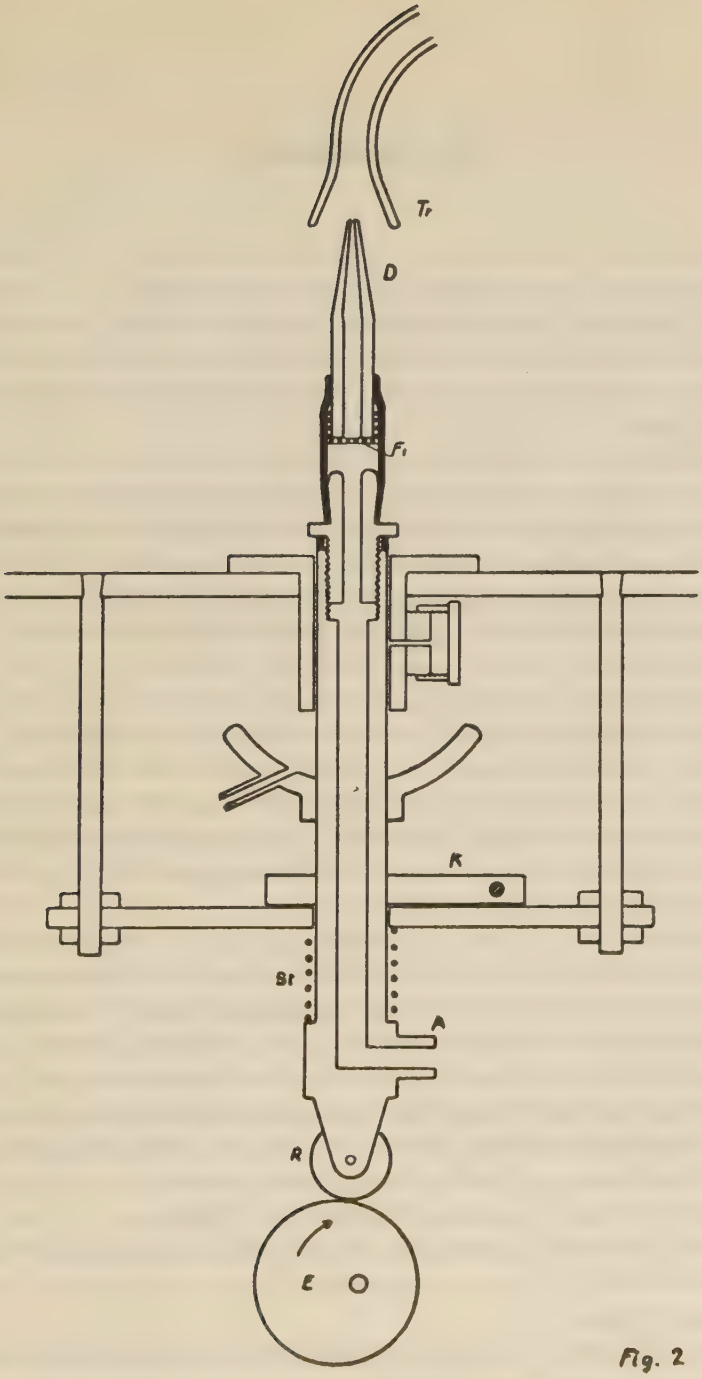


Fig. 2

II. Methodik

Für die vorliegende Arbeit wurde eine Apparatur benutzt, die P. Heinrich nach Vorschlägen von A. Müller für seine Messungen aufgebaut hatte.

Mit dieser Apparatur war es möglich, Gemische, wie sie hier untersucht werden sollten, herzustellen und ihre Strömungswiderstände zu messen. Wegen der Forderung der Konstanz der Geschwindigkeit waren jedoch verschiedene Abänderungen und Ergänzungen nötig.

Die Versuchsanlage war folgende: Die Flüssigkeit befand sich in einem Behälter, an welchem im unteren Bereich eine Glasröhre angeschlossen war. Befand sich das Flüssigkeitsniveau oberhalb der Ausflußstelle, so floß infolge des Druckes der Flüssigkeitssäule ein gleichmäßiger Flüssigkeitsstrom durch die Röhre. Direkt vor der Mündung der Röhre befand sich eine feine, rhythmische Bewegungen ausführende Glasdüse, durch welche die unter einem Überdruck stehende, hydrophobe Flüssigkeit zu der strömenden Flüssigkeit zugesetzt wurde (Fig. 1 und 2).

Die schon erwähnte Versuchsröhre *L* hatte eine Länge von 141,1 cm und einen inneren Durchmesser von 0,2788 cm. An einem Ende war sie rechtwinklig abgebogen und besaß eine trichterförmige Öffnung *Tr*. Dieser Teil der Röhre ragte in einen Kupferbehälter *B* von den Grundflächenmaßen 15×30 cm und einer Höhe von 40 cm hinein. Ein großer durchbohrter Gummipfropfen besorgte den wasserdichten Abschluß zwischen Wand des Behälters und dem Rohre, erlaubte aber gleichzeitig, die Röhre zum Reinigen jederzeit herauszunehmen.

In der Mitte des Behälterbodens, unmittelbar unterhalb des nach unten gerichteten Glastrichters der Röhre befand sich eine Öffnung, durch welche von unten her ein rohrförmiger Stempel *St* in den Behälter hineinragte. Dieser Hohlstempel war so gelagert, daß er leicht in vertikaler Richtung eine Bewegung von einigen mm ausführen konnte. Am unteren, verschlossenen Ende des Stempels befand sich ein Rad *R* von etwa 1 cm Durchmesser. Unterhalb dieses Rades drehte sich eine horizontale, mit einem Exzenter *E* versehene Achse. Der Exzenter bewirkte eine rhythmische Auf- und Abwärtsbewegung des Hohlstempels. Ein Schwungrad *S* sorgte für gleichmäßigen Lauf. Der Antrieb geschah durch einen 1-PS-Motor.

In das obere Ende des Hohlstempels konnte mittels eines messingenen Zwischenstückes eine Glasdüse *D* eingeschraubt werden. Letztere ragte bis in die Mündung des Glastrichters hinein.

Am unteren Ende des Hohlstempels befand sich ein seitlicher Ansatz *A*. Er erlaubte den Anschluß eines Gummischlauches, der am andern Ende an eine Glasröhre

angeschlossen war. Diese Glasröhre ragte von oben her bis zum Boden einer Wulff'schen Flasche *W*. Dazwischen war noch ein Hahn *N* eingeschaltet, um den Zufluß des Öls abstellen zu können.

Die in der Wulff'schen Flasche befindliche hydrophobe Flüssigkeit stand unter dem Druck zweier Druckgefäße *P* von 60 Litern Inhalt. Der Überdruck wurde anfangs mittels einer Luftpumpe hergestellt. Später wurde eine Druckflasche *Fl* verwendet. Der Druck konnte an einem Quecksilber-Manometer *M* abgelesen werden. Um die Konstanz des Druckes zu gewährleisten, mußte das ganze Drucksystem absolut dicht sein.

Die Glasdüsen wurden durch Ausziehen von Glasröhren mit Hilfe des Bunsenbrenners hergestellt. Von mehreren Exemplaren wurden jeweils die passendsten ausgesucht. Sie hatten einen Länge von ca. 6 cm. Das obere Ende wurde zu einer feinen Kapillare von einigen hundert μ Durchmesser ausgezogen.

Die unter Druck stehende hydrophobe Flüssigkeit gelangte also durch die Düsenöffnung in die Strömung des Emulsionsmittels. Es bildeten sich an der Düsenöffnung Öltropfen, die schließlich infolge des rhythmischen Schlages und der Saugwirkung der Strömung sich von der Düse lösten. Diese Öltropfen nahmen dank ihrer Kohäsion Kugelform an und bewegten sich, einer hinter dem andern, in regelmäßigem Abstande, im Emulsionsmittel schwimmend durch die Röhre.

Damit der rhythmische Schlag gut reguliert werden konnte, waren noch zwei Vorrichtungen angebracht. Erstens: Die unterste Stellung des Hohlstempels und damit der Düse konnte durch eine Klemmbride *K* nach Bedürfnis eingestellt werden. Zweitens: Der Kupferbehälter befand sich auf einem horizontalen Gleitsystem. Wurde er etwas verschoben, so änderte sich der Abstand der Achsen des Stempelrades und des Exzenters, wodurch der Hub der Düse größer oder kleiner, resp. heftiger oder weniger heftig wurde. Die Einstellung geschah durch eine Mikrometerschraube *Mi*, welche die genaue Reproduzierbarkeit einer bestimmten Einstellung erlaubte.

Fremdkörper im hydrophoben Öl, besonders kleine Überreste des Schlauchmaterials gaben zuerst oft Anlaß zu Verstopfungen der Düse. Es wurden deshalb noch besondere Filter nötig. Durch Verstopfungen einzelner Öffnungen der Filter durfte aber der Widerstand des Leitungssystems von der Wulff'schen Flasche bis zur Düse im Verlaufe einer Messung nicht merklich erhöht werden. Es wurde deshalb zwischen der Wulff'schen Flasche und dem Hohlstempel ein Drahtnetzfilter *F* mit verhältnismäßig großer Filterfläche eingebaut. Ein kleiner Drahtnetzfilter *Fi* wurde noch direkt zwischen Glasdüse und dem Zwischenstück eingeschaltet, um die letzten Reste von festen Unreinigkeiten aufzuhalten.

Die Druckhöhe.

Die Regulierung des für eine bestimmte Geschwindigkeit nötigen Überdruckes geschah durch Verändern der Niveauhöhe im Kupferbehälter. Der größte Teil der Vorderwand des Kupferbehälters wurde durch eine feste Glasplatte gebildet. Ein vertikal befestigter, in die Flüssigkeit eingetauchter Maßstab H erlaubte die direkte Messung des Abstandes des Flüssigkeitsspiegels von der Rohrachse. Wie schon erwähnt, wurde das arithmetische Mittel der Messungen vor und nach dem Versuch als wirksame Druckhöhe eingesetzt.

Um das Absinken des Flüssigkeitsspiegels während eines Versuches zu verringern, stand der Kupferbehälter durch einen Siphon in Verbindung mit einem danebenstehenden, ebenfalls Flüssigkeit enthaltenden gläsernen Behälter. Zwecks ganzer oder teilweiser Entleerung des Kupferbehälters war im Behälterboden ein Hahn eingebaut. Zur Einstellung verschiedener Druckhöhen wurde noch ein weiteres Reservoir benötigt, um je nach Bedarf mit mehr oder weniger Flüssigkeit im Behälter arbeiten zu können.

Wasserwaage.

Eine Vorbedingung zur Erzielung genauer Werte für die Druckhöhe war eine möglichst genaue horizontale Lagerung der Glasröhre. Eine zweite, U-förmig gebogene Glasröhre wurde deshalb vor die Versuchsröhre montiert. Sie wurde zum Teil mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt. Durch Visieren über die beiden in den vertikalen Schenkeln sich bildenden Menisken konnte die horizontale Einstellung der Versuchsröhre nachkontrolliert werden.

Messung des Ausflußvolumens.

Die während eines Versuches durch die Röhre geflossene Flüssigkeitsmenge wurde am Ende der Röhre von einer Bürette aufgefangen. Die verwendeten Büretten waren zu diesem Zwecke oben trichterförmig erweitert.

Das Gesamtflüssigkeitsvolumen konnte ohne weiteres abgelesen werden.

Um das im Suspensionsmittel enthaltene Ölvolumen festzustellen, mußte zuerst das Öl von der übrigen Flüssigkeit getrennt werden. Durch Zugabe einer spezifisch schweren Salzlösung zum Gemische konnte erreicht werden, daß sich das Öl im oberen Teil der Bürette ansammelte. Nach diesem Vorgang konnte das Ölvolumen ebenfalls an der Bürette abgelesen werden.

Das Öl zeigte aber immer wieder die unangenehme Eigenschaft, sich an der Wand der Bürette festzusetzen. Um diese Öltropfen wieder zu lösen, mußte die Bürette in wechselndem Drehsinn heftig um die eigene Achse gedreht werden. Trotzdem war es nicht immer möglich, alles Öl an die Oberfläche zu schaffen.

Da natürlich besonders die kleinsten Ölkügelchen nur sehr langsam nach oben strebten, mußten mehrere Büretten zur Verfügung sein. Nachdem das Gesamt-

volumen notiert, die Salzsohle zugegeben war, wurde die Bürette beiseite gestellt und das Ölvolumen später abgelesen. Inzwischen konnten weitere Versuche gemacht werden.

Die Division des Ölvolumens durch das Gesamtvolumen ergab jeweils die Konzentration an hydrophober Flüssigkeit. Es wurde sowohl für das Gesamtvolumen wie auch für das Ölvolumen immer der untere Meniskus abgelesen.

Wegen der großen Grenzflächenspannung zwischen Suspensionsflüssigkeit und suspendierter Flüssigkeit bildete sich an der Grenzfläche ein fast halbkugelförmiger, nach unten konvexer Meniskus. Deshalb wurde jede Volumenmessung etwas gefälscht, und zwar bei weiten Büretten mehr als bei engen. Es war also nötig, für jede verwendete Bürette den für sie konstant bleibenden additiven Fehler festzustellen und am abgelesenen Volumen die entsprechende Korrektur anzubringen. Der Fehler wurde festgestellt durch Eichung der Büretten mit Hilfe von Auslaufpipetten.

Der obere Meniskus an der Grenzfläche Luft-Öl zeigte sich nur schwach ausgebildet, so daß für das Gesamtvolumen keine Korrektur nötig war.

Der halbkugelförmige untere Meniskus des Öls bedingte aber noch die Möglichkeit eines parallaktischen Fehlers, der positiv oder negativ sein konnte, was natürlich umsomehr ins Gewicht fiel, als es sich um relativ kleine Ölvolumen handelte. Um auch diese Fehlermöglichkeit auszuschalten, wurde noch eine Visiereinrichtung geschaffen, die es erleichterte, die horizontale Lage der Visierlinie einzuhalten, während die Bürette dank einer Führung genau vertikal gehalten werden konnte. Eine beleuchtete Mattscheibe sorgte für genügend große Helligkeit.

Temperaturkonstanz.

Bekanntlich ist der Viskositätskoeffizient einer Flüssigkeit stark temperaturabhängig. Zu jeder Viskositätsmessung gehört die Angabe der Temperatur, bei der sie vorgenommen wurde.

Alle Messungen dieser Arbeit wurden bei einer Temperatur von 20^0 C gemacht.

Temperaturschwankungen haben aber bei einer heterogenen Flüssigkeit, wie die untersuchte, einen besonders großen Einfluß und mußten deswegen so klein wie möglich gehalten werden. Bei Temperatursteigerungen nahm die Viskosität der Suspensionsflüssigkeit zwar ab, aber infolge der ebenfalls herabgesetzten Viskosität der suspendierten Flüssigkeit floß in der gleichen Zeit mehr durch die Glasdüse in das heterogene Gemisch. Im gleichen Sinne wirkte die durch die Erwärmung bedingte Druckzunahme in den Druckbehältern. Die Ölkugeln wurden also größer und verursachten eine starke Steigerung des Strömungswiderstandes.

Die Meßröhre befand sich aus praktischen Gründen nicht in einem Wasserbad von der entsprechenden Temperatur, da sie oft demontiert werden mußte. Dafür aber wurde die ganze Anlage in einen großen, nach allen Seiten abschließbaren Kasten aufgebaut. Mehrere Glühbirnen spendeten die nötige Wärme, gesteuert durch einen Thermostaten. Ein Ventilator sorgte für gleichmäßige Lufttemperatur im ganzen

Raum. Auf diese Weise war es möglich, die Schwankungen der Lufttemperatur auf ca. $0{,}5^0$ C zu beschränken.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Temperaturkonstanz der im Kupferbehälter befindlichen Suspensionsflüssigkeit verwendet. Eine gläserne Kühlschlange *G* tauchte in die Flüssigkeit. Durch Anschluß an die Kaltwasserleitung war eine Abkühlung möglich. Beim Vorschalten einer Metallspirale, die von einem Bunsenbrenner geheizt wurde, konnte das durchfließende Wasser erwärmt werden, so daß auf diese Weise der Inhalt des Kupferbehälters aufgeheizt wurde. Bei Abweichungen der Temperatur der Suspensionsflüssigkeit um mehr als $^1/_{20}{}^0$ von der festgesetzten wurde sie mit den eben beschriebenen Hilfsmitteln korrigiert.

Der Zweck dieser Arbeit bestand also darin, die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes des heterogenen Gemisches von der Konzentration festzustellen, bei konstanter mittlerer Durchströmungsgeschwindigkeit. Da die Ölkugeln annähernd immer gleich groß gehalten werden sollten, so mußte zur Herstellung verschiedener Konzentrationen die Anzahl der pro Sekunde losgelösten Ölkugeln variiert werden. Einerseits geschah es durch Ändern des Übersetzungsverhältnisses des Elektromotors zum Steuermechanismus der Düsenbewegung. Anderseits gelang es durch Veränderung des Abstandes der Düse von der Rohrmündung und durch Regeln der Heftigkeit des Schlages die Zahl der zur Loslösung einer Kugel nötigen Stöße zu variieren. Um die Kugelgröße beizubehalten, mußte selbstverständlich auch der Überdruck über der zu emulgierenden Flüssigkeit der jeweiligen Einstellung angepaßt werden.

Je nach den verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten mußten auch verschiedene Düsen eingesetzt werden. Bei großen Geschwindigkeiten konnte es vorkommen, daß sich die Loslösung der Öltropfen bei einer bestimmten Größe unabhängig vom Rhythmus der Düsenbewegung von selbst vollzog. In diesem Falle mußten dickwandigere Düsenmündungen verwendet werden, damit eine größere Adhäsionskraft zwischen Glas und Öl eine vorzeitige Loslösung verhinderte. Bei kleinen Durchflußgeschwindigkeiten, wo die Saugkraft der Strömung fast verschwand, war es oft schwierig, die Kugeln von der Düse wegzubringen. Hier mußten Düsen mit ganz dünnwandigen Mündungen verwendet werden, um den Kugeln fast keine Gelegenheit zu geben, sich der Loslösung zu widersetzen.

Transmission.

Zur Steuerung der Düsenbewegung waren verschiedene Übersetzungen nötig. Direkt am Motor angeschlossen war ein Zahnradgetriebe, das ein Wählen von vier verschiedenen Übersetzungsstufen erlaubte. Die Kraftübertragung vom Getriebe zum Schwungrad übernahm ein Lederriemen. Durch Einsetzen verschieden großer Räder war es möglich, genügend viele verschiedene Drehgeschwindigkeiten zu erhalten. Der Lederriemen wurde durch ein besonderes, verschiebbares Rad *Sp* gespannt.

Kugelgröße.

Um die Kugelgröße zu bestimmen, mußte neben dem Gesamtvolumen aller Kugeln, das an der Bürette abgelesen wurde, noch die Anzahl der Kugeln bekannt sein, die im Verlaufe einer Messung von der Bürette aufgefangen wurden.

Mit Hilfe eines Zählers Z, der an der Achse des Exzenters angeschlossen werden konnte, wurde die Anzahl der Umdrehungen in der Minute bestimmt, und zwar für jedes verwendete Übersetzungsverhältnis. Aus der Zeitdauer eines Versuches konnte somit die Gesamtzahl der Schläge, die während der Messung erfolgten, ermittelt werden. Diese Zahl war also das 1, 2, 3 .....fache der Kugelzahl, je nachdem 1, 2, 3 ..... Schläge zur Loslösung einer Kugel gebraucht wurden.

Bei großen Konzentrationen war es oft schwierig, die Anzahl der Schläge pro Kugel mit Sicherheit festzustellen. Vergleiche mit einer zweiten Zähleinrichtung bestehend aus Lichtquelle, Photozelle und Registrierapparat, ermöglichten dann aber immer die Feststellung der pro Kugel nötigen Schlagzahl.

Mit dieser Methode erhielt man also bei jedem Versuch neben der Konzentration und der „Viskosität" auch die Kugelzahl und damit das Volumen einer Kugel. Daraus erhielt man nach der Formel:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V}{\pi}} \tag{23}$$

den Kugelradius. Die Teilchengröße konnte so ständig kontrolliert und wenn nötig korrigiert werden.

Bei der Arbeit mußte folgendermaßen vorgegangen werden:

Für jede pro Minute losgelöste Kugelzahl mußte zuerst durch Versuche die für die vorgeschriebene mittlere Strömungsgeschwindigkeit nötige Druckhöhe ermittelt werden. War diese bekannt, so wurden einige Messungen mit dieser Einstellung gemacht. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit konnte an Hand der Daten jeder Messung berechnet werden. Wurde sie zu klein, so mußte die Druckhöhe wieder vergrößert werden.

Theoretisch hätte einer bestimmten Kugelzahl nur eine Konzentration entsprechen sollen. Sank aber die Geschwindigkeit nur um einen kleinen Betrag, floß also etwas weniger Flüssigkeit durch das Rohr, so stieg automatisch die Konzentration, da weniger Gesamtflüssigkeit, aber die gleiche Menge des Zusatzkörpers in die Röhre floß.

Ebenfalls gelang es nie, die Kugelgröße absolut konstant zu halten, wegen der schon erwähnten, noch möglichen Temperaturschwankung und event. Widerstandserhöhungen in der Passage des Zusatzkörpers durch die Düse.

Es wurden bei jeder gewählten Kugelzahl mehrere Messungen gemacht und die Resultate zusammengestellt.

Um einen Einfluß der chemischen und physikalischen Eigenschaften der Suspensionsflüssigkeit und des Zusatzkörpers zu untersuchen, wurden Versuchsserien mit verschiedenen Flüssigkeitskombinationen unternommen.

In der 1. Zusammensetzung wurde als Suspensionsflüssigkeit eine Wasser-Glycerinmischung verwendet, die einen Viskositätskoeffizienten von $\mu = 1{,}7\ Cp$ besaß. Dieser Viskositätskoeffizient wurde also gleich groß gewählt, wie ihn das Blutplasma aufweist.

Als Zusatzflüssigkeit diente eine Mischung von Paraffinöl, *O*-Dichlorbenzol und geschmolzenem Paraffin. Die Viskosität war $\mu = 7{,}3\ Cp$.

Für die zweite Zusammensetzung wurde als Suspensionsflüssigkeit ein Wasser-Glyceringemisch mit der fünffachen Viskosität ($\mu = 8{,}5\ Cp$) gegenüber dem ersten Gemisch gewählt.

Als Zusatzflüssigkeit diente eine Mischung von Dibromstearinsäure und Paraffinöl.

Herstellung der Gemische für die erste Zusammensetzung:

1. Glycerin-Wassermischung.

Glycerin hat die Eigenschaft, daß es sich mit Wasser in jedem Verhältnis mischt.

Für alle Mischungen wurde das im Handel erhältliche Glycerin vom spezifischen Gewicht 1,23 verwendet. Es entspricht dies 90prozentigem Glycerin.

100prozentiges Glycerin hat gegenüber Wasser eine sehr hohe Viskosität. Bei 20^0 beträgt sie $\mu = 1499\ Cp$, während diejenige des Wassers 1,005 Cp beträgt.

Die Viskosität-Konzentrationskurve von Glycerin verläuft unterhalb 50% praktisch horizontal, um erst bei hohem Prozentgehalt, dann allerdings rapid, anzusteigen. Trotz der relativ niedrig gewählten Viskosität des Gemisches $\mu = 1{,}7\ Cp$ mußten beträchtliche Glycerinmengen verwendet werden.

Es wurde jeweils ein möglichst großes Quantum des Gemisches hergestellt. Es diente dazu, eine Korbflasche von 50 Liter Inhalt. Glycerin wurde solange mit destilliertem Wasser vermischt, bis das Gemisch die gewünschte Viskosität bei 20^0 C besaß. Für $\mu = 1{,}7\ Cp$ mußte der obenerwähnten Kurve entsprechend etwa 19prozentiges Glycerin verwendet werden. Um eine vollständige Durchmischung zu erhalten, wurde die Flasche heftig geschüttelt. Die Bestimmung der Dichte bei der Versuchstemperatur ergab mit dem verwendeten Aräometer 1,042. Bei jeder Neuherstellung eines Gemisches mußte dann solange entweder Wasser oder Glycerin zugegeben werden, bis die Dichte wieder übereinstimmte.

2. Zusatzflüssigkeit.

Zur Herstellung der Zusatzflüssigkeit wurde Paraffinöl (Brändli u. Co., Bern) verwendet:

$$^d20^0 = 0{,}883 \qquad \mu = 180\ Cp$$

Zum Beschweren desselben diente *O*-Dichlorbenzol:

$$^d20^0 = 1{,}3048 \qquad \mu = 1{,}375\ Cp$$

Es wurde folgendermaßen vorgegangen: 100 Volumteile Paraffinöl wurden mit 38 Volumteilen *O*-Dichlorbenzol vermischt. Dem Gemisch von total 13 Liter vom

spez. Gewicht = 1 wurde 5%, d. h. 650 g festes, geschmolzenes Paraffin zugegeben. Davon fielen wieder 90 g aus. Schließlich wurde noch solange *O*-Dichlorbenzol zugegeben, bis das spez. Gewicht mit demjenigen der Glycerinmischung übereinstimmte. Die Viskosität des Gemisches ergab sich zu $\mu = 7{,}3\ Cp$.

Dieses Gemisch hatte die Eigenschaft, fast farblos zu sein. Um die Bewegungen der im Suspensionsmittel emulgierten Ölkugeln besser beobachten zu können, war es von Vorteil, sie zu färben. Es wurde dafür der Farbstoff Sudan III gewählt. Kleine Mengen davon genügten, um den Inhalt der Wulff'schen Flasche rötlich zu färben. Besonders auch, da das Paraffin die lästige Eigenschaft hatte, an der Rohrwand festzukleben, war es nötig, jede Unreinigkeit gut sichtbar zu machen.

Die Gemische der zweiten Zusammensetzung.

1. Suspensionsmittel: Wasser-Glyceringemisch von einer Dichte von 1,144 und einer Viskosität von ca. 8,5 *Cp*.

2. Zusatzflüssigkeit: Zur Herstellung derselben wurde Dibromstearinsäure verwendet. Durch langsames Bromieren von Ölsäure unter ständiger Abführung der dabei freiwerdenden Wärme konnte das schwere, hochvisköse, gelbbraune Öl jeweils erhalten werden.

Da es für diesen Zweck spezifisch zu schwer war, wurde eine Mischung: 1 kg Dibromstearinsäure, 250 g Paraffinöl und 6,4 g festes Paraffin, hergestellt. Diese wies das gewünschte spez. Gewicht von 1,144 auf und hatte eine Viskosität von 395 *Cp*. Für diesen Fall war keine Färbung der Kugeln mehr nötig.

Zur Trennung der hydrophoben Flüssigkeit vom Suspensionsmittel in der Bürette eignete sich sehr gut eine höchstkonzentrierte Lösung von Ammoniumsulfat, das ein genügend hohes spez. Gewicht hatte.

Eichung der Röhre.

Um den Viskositätskoeffizienten aus den Messungsergebnissen berechnen zu können, mußte noch die in der Poiseuille'schen Gleichung vorkommende Konstante $K = \frac{g}{8\pi}\frac{q^2}{l}$ für die benützte Röhre ermittelt worden. Da wegen der trichterförmigen Mündung der Glasröhre die Länge nicht genau gemessen werden konnte, wurde die Röhrenkonstante außerdem durch Eichung mit destilliertem Wasser ermittelt, dessen Viskositätskoeffizient bei 20° 1,005 *Cp* beträgt. Dabei wurde die bei größeren Geschwindigkeiten nötige sog. Hagenbach'sche Korrektur der Druckhöhe für die kinetische Energie

$$h_{kin.} = 1{,}1\ \frac{\bar{u}^2}{g} \tag{24}$$

angebracht.

Es ergab sich der Mittelwert: $K = 0{,}001022$.

Mängel der Methodik.

Der Charakter der Meßmethode erlaubte nicht, Präzisionsmessungen ausführen zu können. Die Meßergebnisse sind mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet wegen der verschiedenen Fehlerquellen, die nicht eliminiert werden konnten:

a) Bei der klassischen Anordnung nach Poiseuille befand sich die Mündung der Versuchsröhre unter Flüssigkeit, um eine Wirkung der Oberflächenspannung am Ende der Röhre zu verunmöglichen.

Unsere Versuche verlangten aber eine freie Mündung, besonders auch, da neben dem Gesamtvolumen das Ölvolumen bestimmt werden mußte.

Nun bildete sich an der Bregenzungsfläche Luft-Flüssigkeit eine unter Spannung stehende, feine Schicht, die dem Ausfluß der Flüssigkeit einen gewissen Widerstand entgegensetzte. Sie wirkte entgegengesetzt der Druckhöhe h, und es wäre somit von dieser ein bestimmter Betrag abzuziehen, um jene Druckhöhe zu erhalten, die nur zur Überwindung der Viskosität diente.

Nun zeigte es sich, daß der Einfluß bei der Geschwindigkeit 4 cm/sec gering, bei kleineren Geschwindigkeiten aber beträchtlich war. Erstens fiel die Oberflächenspannung bei einer Druckhöhe von 4 bis 4,8 cm weniger ins Gewicht, als bei der Geschwindigkeit 0,6 cm pro sec mit Druckhöhen bis 0,7 cm hinunter, wo der prozentuale Fehler natürlich viel größer war. Zweitens spielte sich bei kleinen Geschwindigkeiten folgender Vorgang ab:

Näherte sich eine Kugel dem Rohrende, so mußte sie die Oberflächenwand, gebildet aus dem Wasser-Glyceringemisch einerseits und der Luft andererseits, ausbuchten, da ihre Oberflächenkrümmung größer war als diejenige der letzteren. Bei kleinen Geschwindigkeiten kam es vor, daß die Kugel am Rohrende einfach stehen blieb, während die Flüssigkeit ausfloß. Die zweite Ölkugel näherte sich somit der ersten, bis sich beide berührten, und auch die folgenden Kugeln zum Stehen brachten. Die Kugeln stauten sich gewöhnlich so, daß sie abwechslungsweise an die untere und obere Rohrwand gedrückt wurden.

Hatten sich etwa 5 bis 7 Kugeln am Rohrende angesammelt, so begannen die ersten auszutropfen, während sich immer wieder neue ansammelten. Zur eigentlichen Steigerung des Strömungswiderstandes kamen also zusätzlich große Reibungskräfte,

die die Endergebnisse fälschten. Tastversuche mit einem Abtropfstäbchen ergaben bedeutend niedrigere Werte für die „Viskosität", es war aber schwer zu sagen, inwieweit durch Verwendung derselben die Druckhöhe vergrößert wurde, und man dann wieder zu kleine Werte erhielt.

b) Die Strömungsversuche wurden ausgeführt mit Kugeln, die annähernd gleichschwer waren wie die Flüssigkeit. Eine kleine Verstimmung im spez. Gewicht, die sich trotz aller Vorsicht immer wieder zeigte, war eigentlich nur von Vorteil. Herrschte vollkommene Übereinstimmung des spez. Gewichtes, was dadurch festgestellt

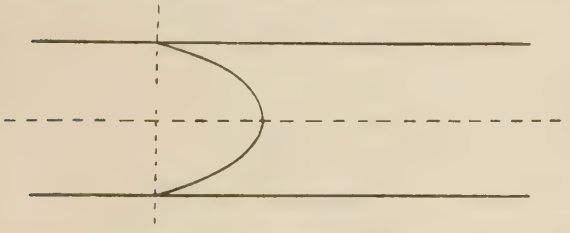
werden konnte, daß die Kugeln auch die Rohrmitte einhielten, wenn durch Abschluß des Rohrendes der Fluß zum Stehen gebracht wurde, so traten immer wieder große Unregelmäßigkeiten im Kugelabstand ein, was besonders bei größeren Konzentrationen zur Vereinigung zweier oder mehrerer Kugeln zu Zylindern zur Folge hatte. Der konstante Kugelabstand konnte dagegen aufrecht erhalten werden, wenn ein kleiner Unterschied im spez. Gewicht vorhanden war.

c) Blieb die Versuchsanlage einige Zeit in Ruhe, so drang etwas Suspensionsflüssigkeit in die Düse ein. Bei der Wiederinbetriebnahme mußte diese Flüssigkeit durch das durchgepreßte Öl aus der Düse entfernt werden. Die ersten Ölkugeln hatten immer Einschlüsse von Flüssigkeitsbläschen, was ermöglichte, event. Rotationen der Kugeln festzustellen. Bei großen Geschwindigkeiten kam es oft vor, daß die Kugeln aus der Rohrmitte nach oben und unten pendelten. An Hand der Flüssigkeitsbläschen konnte dabei sehr gut beobachtet werden, wie die Kugeln bald im positiven, bald im negativen Sinne rotierten, je nachdem sie sich unterhalb oder oberhalb der Achse der Röhre befanden.

d) Verschiedene Unregelmäßigkeiten erschwerten die Versuche. Oft konnte sehr gut eine Periode in der Kette der Kugelabstände festgestellt werden. Es mußte das mit einer Ungleichförmigkeit des Motors oder der Transmission zusammenhängen. Häufig kam es vor, daß sich Gruppen von 2 oder 3 Kugeln bildeten. Diese Unregelmäßigkeiten zeigten sich besonders am Ende des Rohres, während sie am Anfang mit bloßem Auge nicht sichtbar waren. Die Ursache dieser Unregelmäßigkeit muß in einer Inkonstanz der Kugelgröße gesucht werden. War eine Kugel etwas größer, als die ihr folgende, so wurde ihr Abstand von der zweiten zusehends kleiner, und war der Größenunterschied ausreichend, so wurde die erste Kugel von der ihr folgenden noch innerhalb des Rohres eingeholt.

Die Annahme des Parabelprofils der Geschwindigkeitsverteilung im Rohr erklärt diese Erscheinung.

Befindet sich eine Kugel in der Strömung, wo an jedem Punkt eine andere Geschwindigkeit herrscht, so wird sie sich mit einer Geschwindigkeit fortbewegen, entsprechend dem Mittel aller Geschwindigkeiten, die innerhalb dem um die Kugel gedachten Stromzylinder vorkommen. Eine Kugel mit dem Durchmesser des Rohres wird sich also gerade mit der mittleren Geschwindigkeit des Gesamtstromes $\bar{u}$ fortbewegen. Eine sehr kleine Kugel, die genau in der Rohrmitte schwimmt, hat die maximale Geschwindigkeit, die, wie die Rechnung ergibt, gleich der doppelten mittleren Geschwindigkeit ist.



Für die Kugelgröße ist offenbar der Moment des Abschlages von Bedeutung. Solange sich der Öltropfen an der Düse festklammert, wird er wachsen. Je nachdem nun die Umdrehungszahl etwas größer oder kleiner, der Abschlag folglich etwas

weniger heftig oder heftiger ist, wird der Tropfen etwas früher oder später sich von der Düse lösen, somit wird er etwas kleiner oder größer.

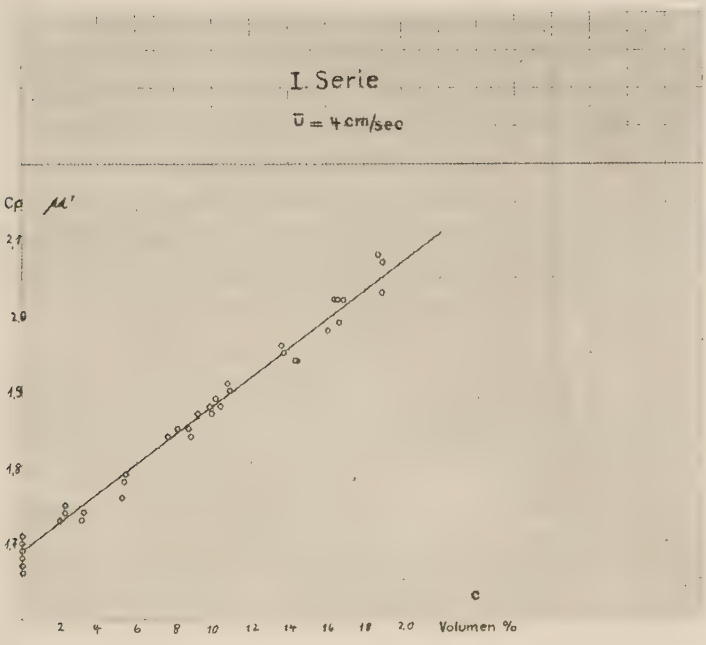
e) Interessant waren auch die Beobachtungen periodischer Verschiebungen einzelner Kugeln in horizontaler Richtung. Pendelten die Kugeln kaum feststellbar von der Rohrmitte aus nach oben oder nach unten, so kamen sie immer wieder in Zonen anderer, mittlerer Geschwindigkeiten. Sie bewegten sich bald schneller, bald wieder langsamer vorwärts. Das Ganze sah aus wie Longitudinalschwingungen der Kugeln längs der Strömungsrichtung.

f) Auch bei stärkerem Unterschied im spez. Gewicht schien im allgemeinen immer noch eine Schicht der Suspensionsflüssigkeit zwischen Kugel und Glasrohr zu bestehen. An einem scheinbar an der oberen oder unteren Wand direkt anliegenden Öltropfen konnte ausnahmsweise beobachtet werden, wie Ölteilchen plötzlich noch näher an die Wand kamen und versuchten, den ganzen Öltropfen festzuhalten. Gelang es einmal einem Öltropfen, an der Wand Fuß zu fassen, so bildete er die Ursache von Verstopfungen der Röhre und die Messung mußte natürlich abgebrochen werden.

Reinigung der Apparatur.

Die Eigenschaft des Zusatzkörpers, sich an den Wänden festzusetzen, erforderte häufige Reinigung der Apparatur, besonders des Kupferbehälters und der Glasröhre. Nach einigen Messungen wurde die Röhre herausgenommen, durchspült mit dest. Wasser, Alkohol, Äther und schließlich mit Chromschwefelsäure. Nach der Nachspülung mit dest. Wasser wurde mittels der Wasserstrahlpumpe Luft zum Trocknen durchgesaugt.

Auch die Büretten konnten nur für eine Messung verwendet werden, nachher mußte mansie wieder reinigen. Gewöhnlich wurden sie mit Chromschwefelsäure gefüllt und über Nacht stehen gelassen. Nur so konnte zwecks Volumenbestimmung eine einigermaßen exakte Trennung des Öles von der Glycerinmischung erreicht werden.


I. Serie
$\bar{u} = 4$ cm/sec
Cp μ'
2,1
2,0
1,9
1,8
1,7
c
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 Volumen %

III. Ergebnisse

Durch bloße Überlegung scheinen folgende drei Möglichkeiten als Ergebnisse in Frage zu kommen:

1. Schon wenige Kugeln bringen eine große Verwirrung in die geordneten Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen. Die Schichtenströmung und das Parabelprofil wird dermaßen gestört, daß bei kleinen Konzentrationen ein starker Anstieg des Strömungswiderstandes eintritt. Kommen dann aber weiter Kugeln hinzu, so können diese keinen großen Beitrag zur Zerstörung der ursprünglich idealen Geschwindigkeits-Richtung und -Verteilung mehr leisten, so daß also ihre Gegenwart nicht mehr so sehr ins Gewicht fällt.

Falls diese Annahme zutrifft, so muß die „Viskosität"-Konzentrationskurve bei kleinen Konzentrationen stark ansteigen, um dann bei größeren Konzentrationen flacher zu werden.

$$\frac{d^2 \mu'}{d c^2} < 0 \tag{25}$$

2. Jede Kugel stellt eine bestimmte, gleich groß bleibende Zunahme des Widerstandes dar, unabhängig davon, ob und wie viele Kugeln sich schon in der Strömung befinden.

Trifft dies zu, dann ist der Strömungswiderstand eine lineare Funktion der Konzentration.

$$\frac{d^2 \mu'}{d c^2} = 0 \tag{26}$$

3. Es wäre auch denkbar, daß anfangs einige Kugeln keinen großen Einfluß auf μ' ausüben würden. Je näher aber die Kugeln gegenseitig kommen, d. h. je größer die Konzentration, um so schwerwiegender wirkt ein Konzentrationsanstieg, da die Kugeln in eine gegenseitige Einflußzone geraten und sich gegenseitig stören.

Die „Viskosität"-Konzentrationskurve wäre in diesem Falle konkav nach oben:

$$\frac{d^2 \mu'}{d c^2} > 0 \tag{27}$$

Schließlich können auch Kombinationen zweier oder aller drei Fälle auftreten.

Die Frage, welcher von denen ins Auge gefaßten Fällen der Wirklichkeit entspricht, hängt direkt zusammen mit der Frage, welches Strömungsprofil bei dieser Strömungsart existiert.

Die Kenntnis der gesuchten „Viskosität"-Konzentrationskurve wird somit auch Lichtblicke über diese zweite Frage bringen.

Meßergebnisse der ersten Versuchsserie.

Die Messungen der ersten Versuchsserie wurden bei einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit: $\bar{u} = 4$ cm/sec ausgeführt.

Die Ergebnisse sind in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I

h cm	t sec	V cm³	v cm³	$\bar{u}$ cm/sec	μ' Cp	c Vol.%	Teilchenzahl	V_T cm³ 0,00
4,12	180	45,8	0,9	4,17	1,73	1,96	172	523
4,09	360	90,2	2,0	4,11	1,74	2,22	344	582
4,06	90	22,2	0,5	4,05	1,75	2,25	86	582
4,10	180	45,4	1,4	4,13	1,73	3,09	258	543
4,09	360	90,2	2,9	4,11	1,74	3,22	516	562
4,32	360	93,9	4,9	4,27	1,76	5,22	828	592
4,19	180	45,2	2,4	4,11	1,78	5,31	414	580
4,15	90	22,2	1,2	4,05	1,79	5,41	207	580
4,27	90	22,3	1,7	4,07	1,84	7,63	303	561
4,27	180	44,3	3,6	4,03	1,85	8,13	606	594
4,13	300	71,4	6,2	3,90	1,85	8,68	1010	614
4,44	120	30,8	2,7	4,21	1,84	8,78	552	490
4,30	120	29,5	2,7	4,03	1,87	9,16	552	490
4,36	120	29,7	2,9	4,06	1,88	9,78	552	525
4,42	120	30,2	3,0	4,12	1,87	9,94	552	544
4,52	120	30,7	3,1	4,19	1,89	10,10	552	561
4,38	120	29,7	3,0	4,06	1,89	10,10	552	544
4,54	120	30,9	3,2	4,22	1,88	10,35	552	580
4,45	90	22,4	2,4	4,08	1,91	10,70	414	580
4,37	90	22,1	2,4	4,03	1,90	10,85	414	580
4,72	120	30,8	4,2	4,21	1,96	13,60	856	490
4,68	120	30,7	4,2	4,19	1,95	13,70	856	490
4,56	120	30,0	4,3	4,10	1,94	14,33	856	502
4,62	120	30,5	4,4	4,17	1,94	14,40	856	514
4,81	120	31,2	5,0	4,26	1,98	16,00	856	585
4,91	120	31,1	5,1	4,25	2,02	16,4	856	596
4,78	120	30,2	5,0	4,12	2,02	16,55	856	585
4,58	120	29,5	4,9	4,03	1,99	16,60	856	572
4,69	120	29,7	5,0	4,06	2,02	16,85	856	585
4,99	90	23,0	4,3	4,19	2,08	18,70	834	515
4,92	120	31,0	5,85	4,23	2,03	18,90	1112	526
4,92	240	60,8	11,5	4,15	2,07	18,95	2224	517
3,97	90	22,8			1,67			
4,10	90	23,5			1,68			
4,07	90	23,3			1,68			
3,88	90	21,75			1,71			
3,82	90	21,55			1,70			
3,76	90	21,2			1,70			
4,24	120	32,4			1,68			
4,18	120	32,3			1,66			
4,13	120	30,9			1,71			
4,77	120	35,7			1,71			
4,72	180	52,9			1,71			
4,67	120	35,1			1,70			

h bedeutet die mit dem Maßstab im Kupferbehälter bestimmte Druckhöhe,
t ist die Dauer eines Versuches in Sekunden, während dem das Gesamtvolumen V ausfloß,
v bedeutet der Anteil des Ölvolumens,
$\bar{u}$ ist die aus V, t und dem Querschnitt q der Röhre berechnete mittlere Strömungsgeschwindigkeit,
μ' ist der nach der Poiseuill'schen Formel berechnete „Viskositätskoeffizient" in Centipoise.

Der Quotient

$$c = \frac{v}{V} 100 \tag{28}$$

stellt die Konzentration dar, das heißt den prozentualen Anteil des Ölvolumens vom Gesamtvolumen.

Die 8. Kolonne entspricht der Anzahl Kugeln, die während der Dauer eines Versuches gebildet wurden.

Daraus und aus dem Gesamtölvolumen konnte das mittlere Volumen einer Kugel berechnet werden, zusammengestellt in der letzten Kolonne.

Der am Manometer abgelesene Druck im Drucksystem variierte von 40—400 mm Hg, je nachdem kleine oder große Ölmengen ausgepreßt werden mußten und je nachdem weite oder enge Glasdüsen erforderlich waren.

Auswertung der Meßresultate.

Die Zahlenpaare, die als Resultat des Experimentes in der 6. und 7. Kolonne zusammengestellt sind, stellen also einzelne Werte der „Viskosität" dar bei verschiedenen Konzentrationen.

Jede Messung ist mit einem bestimmten Fehler belastet, bedingt durch die Unvollkommenheit der Meßmethode. In der graphischen Aufzeichnung der Werte kommt dies zum Ausdruck durch die Streuung der Meßpunkte. Um nun das Gesetz der Abhängigkeit zu finden, wurde die Ausgleichsrechnung zu Hilfe gezogen.

Die Methode der kleinsten Quadrate, wie sie hier angewendet wurde, geht von folgender Überlegung aus: Man kommt mit größter Wahrscheinlichkeit der wahren Gesetzmäßigkeit, die durch eine Anzahl von Meßresultaten erst angedeutet ist, am nächsten mit jener Funktion, bei der die Totalsumme aller Quadrate der Abstände der einzelnen gemessenen Werte vom Funktionswert ein Minimum ist.

Die Aufzeichnung der Meßresultate im graphischen Schema verrät dem Auge den Charakter einer linearen Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Konzentration. Falls die gesuchte Abhängigkeit aber eine Potenzfunktion ist, so kann sie durch eine Parabel annähernd wiedergegeben werden. Im folgenden sei einmal angenommen, diese Annäherung sei durch die Gleichung:

$$\mu' = A + B\,c + C\,c^2 \tag{29}$$

dargestellt.

Ist aber Linearität vorhanden, so muß der Koeffizient des Quadratischen Gliedes verschwindend klein, theoretisch gleich Null werden.

Falls n-Messungen vorliegen, so gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mu'_1 &= A + B c_1 + C c_1^2 \\
\mu'_2 &= A + B c_2 + C c_2^2 \\
&\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
&\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
&\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
\mu'_n &= A + B c_n + C c_n
\end{aligned}$$

Die linken Seiten stellen die gemessenen, die rechten Seiten die aus den aufgestellten Gleichungen berechneten Werte von μ' dar, während A, B und C die vorläufig noch unbekannten Koeffizienten sind. Die Differenzen

$$\mu'_1 - A - B c_1 - C c_1^2 \quad \text{bis} \quad \mu'_n - A - B c_n - C c_n^2$$

sind die Einzelabweichungen zwischen berechneten und gemessenen Werten von μ'. Die Summe ihrer Quadrate soll ein Minimum sein.

$$\Sigma (\mu' - A - B c - C c^2)^2 = \text{Min.}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\varrho \Sigma (\mu' - A - B c - C c^2)^2}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma (\mu' - A - B c - C c^2)^2}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma (\mu' - A - B c - C c^2)^2}{\partial C} = 0$$

Differentiation ausgeführt ergibt:

$$\begin{aligned}
-2 \Sigma (\mu' - A - B c - C c^2) &= 0 \\
-2 \Sigma (\mu' - A - B c - C c)^2 c &= 0 \\
-2 \Sigma (\mu' - A - B c - C c^2) c^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma \mu' &= A n + B \Sigma c + C \Sigma c^2 \\
\Sigma \mu' c &= A \Sigma c + B \Sigma c^2 + C \Sigma c^3 \\
\Sigma \mu' c^2 &= A \Sigma c^2 + B \Sigma c^3 + C \Sigma c^4
\end{aligned}$$

Wir erhalten also drei Gleichungen mit den drei Unbekannten A, B und C. Um dieses Gleichungssystem auflösen zu können, mußten die Werte:

$$\Sigma \mu', \Sigma c, \Sigma c^2, \Sigma c^3, \Sigma c^4, \Sigma \mu' c \quad \text{und} \quad \Sigma \mu' c^2$$

berechnet werden, was in Tabelle Ia geschah.

Tabelle Ia

μ'	c	c^2	$c\mu'$	c^3	c^4	$c^2\mu'$
1,74	2,2	4,84	3,828	10,648	23,4256	8,4216
1,75	2,3	5,29	4,025	12,167	27,9841	9,2575
1,73	2,0	4,00	3,460	8,000	16,0000	6,9200
1,67	0	0	0	0	0	0
1,73	3,1	9,61	5,363	29,791	92,3521	16,6253
1,74	3,2	10,24	5,568	32,768	104,8576	17,8176
1,71	0	0	0	0	0	0
1,70	0	0	0	0	0	0
1,70	0	0	0	0	0	0
1,76	5,2	27,04	9,152	140,608	731,1616	47,5904
1,80	5,4	29,16	9,720	157,464	850,3056	52,4880
1,78	5,3	28,09	9,434	148,877	789,0481	50,0002
1,68	0	0	0	0	0	0
1,68	0	0	0	0	0	0
1,85	8,7	75,69	16,095	658,503	5728,9761	140,0265
1,85	8,1	65,61	14,985	531,441	4304,6721	121,3785
1,84	7,6	57,76	13,984	438,976	3336,2176	106,2784
1,88	10,4	108,16	19,552	1124,864	11698,5856	203,3408
1,91	10,7	114,49	20,437	1225,043	13107,9601	218,6759
1,85	8,8	77,44	16,280	681,472	5996,9536	143,2640
1,87	9,2	84,64	17,204	778,688	7163,9296	158,2768
1,88	9,8	96,04	18,424	941,192	9223,6816	180,5552
1,95	13,7	187,69	26,715	2571,353	35227,5361	365,9955
1,94	14,3	204,49	27,742	2924,207	41816,1601	396,7106
1,96	13,6	184,96	26,656	2515,456	34210,2016	362,5216
1,94	14,4	207,36	27,936	2985,984	42998,1696	402,2784
1,89	10,1	102,01	19,089	1030,301	10406,0401	192,7989
1,89	10,1	102,01	19,089	1030,301	10406,0401	192,7989
1,87	9,9	98,01	18,513	970,299	9605,9601	183,2787
1,90	10,9	118,81	20,710	1295,029	14115,8161	225,7390
1,68	0	0	0	0	0	0
1,66	0	0	0	0	0	0
1,71	0	0	0	0	0	0
2,02	16,4	268,96	33,128	4410,944	72339,4816	543,2992
2,02	16,6	275,56	33,532	4574,296	75933,3136	556,6312
2,02	16,9	285,61	34,138	4826,809	81573,0721	576,9322
1,98	16,0	256,00	31,680	4096,000	65536,0000	506,8800
1,99	16,6	275,56	33,034	4574,296	75933,3136	548,3644
2,08	18,7	349,69	38,896	6539,203	122283,0961	727,3552
2,07	19,0	361,00	39,330	6859,000	130321,0000	747,2700
2,03	18,9	357,21	38,367	6751,269	127598,9841	725,1363
1,71	0	0	0	0	0	0
1,71	0	0	0	0	0	0
1,70	0	0	0	0	0	0
80,82	338,1	4433,03	656,066	64875,249	1013500,2959	8734,9068

Ergebnisse:

$$n = 44;\ \Sigma\,\mu' = 80{,}82;\ \Sigma\,c = 338{,}1;\ \Sigma\,c^2 = 4433{,}03;\ \Sigma\,c^3 = 64875{,}249;$$

$$\Sigma\,c^4 = 1'013'500{,}2959;\ \Sigma\,\mu'\,c = 656{,}066;\ \Sigma\,\mu'\,c^2 = 8734{,}9068.$$

In obige Gleichungen eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} 80{,}82 &= \quad 44 \quad A + \quad 338{,}1\, B + \quad 4433\, C \\ 656{,}07 &= 338{,}1\, A + \quad 4433 \quad B + \quad 64875\, C \\ 8734{,}9 &= 4433 \quad A + 64875 \quad B + 1013500\, C \end{aligned}$$

Wird die Rechnung ausgeführt, so kommt man schließlich zu den Werten für die gesuchten Größen:

$$\begin{aligned} A &= 1{,}6922 \\ B &= 0{,}017794 \\ C &= 0{,}000077673 \end{aligned}$$

Die gesuchte Beziehung lautet also:

$$\mu' = 1{,}6922 + 0{,}017794\, c + 0{,}000077673\, c^2$$

Man sieht, daß die Auswertung dieser Meßserie eine annähernd lineare Funktion ergibt, da der Koeffizient des quadratischen Gliedes sehr klein ist und letzteres deswegen vernachlässigt werden kann. Dieses Resultat bedeutet für die Ausgleichsrechnung der weiteren Versuchsreihen eine beträchtliche Vereinfachung.

Bei linearer Abhängigkeit:

$$\mu' = A + B\, c \tag{30}$$

sind nur noch zwei Unbekannte zu bestimmen. Sind n-Messungen gemacht worden, so stellen die Werte

$$\mu'_1 - A - B\, c_1 \quad \text{bis} \quad \mu'_n - A - B\, c_n$$

wieder die Einzelabweichungen zwischen berechneten und gemessenen Werten von μ' dar, und die Summe ihrer Quadrate muß ein Minimum sein.

Daraus folgt das vereinfachte Gleichungssystem:

$$\frac{\partial\, \Sigma\, (\mu' - A - B\, c)^2}{\partial\, A} = 0$$

$$\frac{\partial\, (\Sigma\, \mu' - A - B\, c)^2}{\partial\, B} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} -2\, \Sigma\, (\mu' - A - B\, c) &= 0 \\ -2\, \Sigma\, (\mu' - A - B\, c) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \Sigma\, \mu' &= A\, n + B\, \Sigma\, c \\ \Sigma\, \mu'\, c &= A\, \Sigma\, c + B\, \Sigma\, c^2 \end{aligned}$$

Durch Auflösen dieses Gleichungssystems nach A und B erhält man die Formeln:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma\, \mu' & \Sigma\, c \\ \Sigma\, \mu'\, c & \Sigma\, c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma\, c \\ \Sigma\, c & \Sigma\, c^2 \end{vmatrix}} \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} n & \Sigma\, \mu' \\ \Sigma\, c & \Sigma\, \mu'\, c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma\, c \\ \Sigma\, c & \Sigma\, c^2 \end{vmatrix}}$$

Es sind also nur die Werte

$$\Sigma \mu' , \Sigma c , \Sigma c^2 \quad \text{und} \quad \Sigma \mu' c$$

zu berechnen.

Für die erste Serie erhält man $A = 1{,}690$

$B = 0{,}019093$

und somit die vereinfachte Gleichung

$$\mu' = 1{,}690 + 0{,}019093\, c$$

Werden sowohl die aus der ersten Gleichung folgende Kurve wie auch die durch die zweite bestimmte Gerade im graphischen Schema eingezeichnet, so findet man, daß sie praktisch zusammenfallen. Die nach der linearen Gleichung berechnete „Viskosität" einer 10%igen Suspension weicht von der nach der quadratischen Gleichung berechneten um einen Fehler von $+ 0{,}0030227\ Cp$ ab, für eine 20%ige Suspension um einen Fehler von $- 0{,}0072892\ Cp$. Diese Differenzen liegen weit innerhalb des Fehlerbereiches der Messungen.

Für den Idealfall des vollkommenen Schwebens der Kugeln, wie es beim Experiment nicht ganz erreicht werden konnte, ergibt sich somit als Resultat dieser Arbeit eine lineare Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Konzentration bei der untersuchten Strömungsart.

Wie im Abschnitt der Methodik erwähnt, wurde während der Versuche darnach getrachtet, die Kugelgröße konstant zu halten. Es wurde dort erklärt, warum trotzdem Schwankungen unvermeidlich waren.

Die Kugelvolumina V_T wurden in den letzten Kolonnen der Tabellen notiert. Durch Mittelwertbildung aus allen V_T erhielt man das durchschnittliche Kugelvolumen der ganzen Meßreihe $\overline{V}_T$.

Für die erste Serie erhielt man:

$$\Sigma V_T = 0{,}17684$$

$$\frac{\overline{V}_T = 0{,}17684}{32} = 0{,}005526\ \text{cm}^3$$

Dies entspricht einem mittleren Kugeldurchmesser von

$$\overline{D}_T = 0{,}2194\ \text{cm}$$

Daraus erhält man das Verhältnis:

$$\frac{\text{Teilchendurchmesser} = 0{,}2194}{\text{Rohrdurchmesser} = 0{,}2788} = 0{,}7870$$

Die relative Viskosität.

Der Vergleich der Versuchsresultate bei verschiedenviskösen Flüssigkeiten wird erleichtert, wenn die durch die eingelagerten Teilchen scheinbar erhöhte Viskosität auf die Anfangsströmung bezogen wird. Unter der relativen Viskosität einer Suspension versteht man das Verhältnis der „Viskosität" der Suspension zu der des reinen Suspensionsmittels

$$\mu_{rel} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{31}$$

Für die bisher verwendete Suspension ergab sich:

$$\mu' = 1{,}690 + 0{,}019093\, c$$

Für $c = 0$ erhält man $\mu' = 1{,}690$; 1,690 ist somit die Viskosität des reinen Suspensionsmittels, welche mit μ bezeichnet wird. Die relative Viskosität der Suspension ist also:

$$\mu_{rel} = \frac{1{,}690 + 0{,}019093\, c}{1{,}690}$$

$$\underline{\underline{\mu_{rel} = 1 + 0{,}011298\, c}}$$

Die Auswertung jeder Versuchsserie ergibt eine Gleichung von der allgemeinen Form:

$$\mu' = \mu + B\, c$$

B gibt die Steigung der Geraden an und wird für jede Suspension einen bestimmten Wert haben entsprechend der Viskosität des Suspensionsmittels. Die relative Viskosität ist dann:

$$\mu_{rel} = \frac{\mu + B\, c}{\mu} = 1 + \frac{B}{\mu}\, c$$

Bezeichnet man den Quotienten: Volumenanteil der Kugeln/Volumen der Suspension mit φ, also

$$\frac{v}{V} = \varphi \quad \text{so ist} \quad \varphi \,.\, 100 = c \text{ in } \% \qquad \text{Siehe (28)}$$

und

$$\mu_{rel} = 1 + \frac{B}{\mu}\, 100\, c$$

Setzen wir $\frac{B}{\mu} . 100 = K$, so ergibt sich für jede Suspension

$$\mu_{rel} = 1 + K\, \varphi \tag{32}$$

Da es sich um relative Viskositäten handelt, so ist K bei gleichbleibenden Bedingungen unabhängig von der Viskosität des Suspensionsmittels. In der Folge wird sich das Interesse hauptsächlich auf diesen Wert K richten, und es wird in den weiteren Meßreihen eine möglichst sichere Annäherung an den wahren Wert von K erstrebt.

Mit der gleichen Suspension wurden noch Meßreihen bei mittleren Durchflußgeschwindigkeiten von 2 cm/sec und 0,5 cm/sec durchgeführt. Die Auswertung mußte aber ausfallen, da die Druckhöhen zu klein ausfielen, und die Oberflächenspannung am Ende der Röhre zu sehr ins Gewicht fiel.

Die weiteren Versuche wurden mit der zweiten Zusammensetzung der Suspension ausgeführt. Diese hatte den Vorteil, wegen der größeren Viskosität größere Druckhöhen zu verlangen, wodurch Ablesefehler sowie Fehler, verursacht durch die Oberflächenspannung, die Resultate weniger fälschten. Es wurden Meßserien bei mittleren Durchströmungsgeschwindigkeiten von 0,5, 2 und 4 cm/sec durchgeführt.

Tabelle II

h cm	t sec	V cm^3	v cm^3	$\bar{u}$ cm/sec	μ' Cp	c Vol.%	Teilchenzahl	V_T cm^3 0,00
18,35	120	30,4	0,7	4,15	8,49	2,3	115	610
18,45	120	30,4	0,8	4,15	8,53	2,63	115	698
18,55	120	30,1	0,85	4,11	8,66	2,82		
18,35	120	29,8	0,85	4,07	8,64	2,85		
18,5	120	30,0	1,15	4,10	8,66	3,84	172	669
18,67	120	30,1	1,2	4,11	8,72	4,0	172	699
18,55	120	29,9	1,2	4,09	8,72	4,02	172	699
18,77	120	30,2	1,25	4,12	8,74	4,14	172	727
18,92	120	30,4	1,3	4,15	8,74	4,28	172	756
19,15	120	30,0	2,0	4,10	8,96	6,67	344	582
19,02	120	29,9	2,0	4,09	8,93	6,69	344	582
19,3	120	30,3	2,05	4,14	8,95	6,78	344	596
19,25	120	30,0	2,05	4,10	9,01	6,84	344	596
19,45	120	30,1	2,2	4,11	9,08	7,32	344	640
19,0	120	29,1	2,3	3,98	9,16	7,91	344	669
19,82	120	29,9	3,1	4,09	9,3	10,36	552	562
19,62	120	29,4	3,2	4,02	9,37	10,9	552	580
19,75	120	29,4	3,2	4,02	9,42	10,9	552	580
19,6	120	29,4	3,3	4,02	9,36	11,21	552	598
19,35	120	28,9	3,3	3,95	9,40	11,4	552	598
19,55	150	36,2	4,2	3,95	9,48	11,6	690	609

II. Serie.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bei dieser Serie war

$$u = 4 \text{ cm/sec}$$

Aus den verfertigten Tabellen erhielt man die Werte:

$$\begin{aligned} n &= 21 && (n = \text{Zahl der Messungen}) \\ \Sigma\,\mu' &= 188{,}32 \\ \Sigma\,c &= 139{,}4 \\ \Sigma\,c^2 &= 1143{,}74 \\ \Sigma\,c\,\mu' &= 1271{,}223 && \Sigma\,V_T = 0{,}1205 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

und folglich aus den abgeleiteten Formeln:

$$A = \frac{188{,}32 \cdot 1143{,}74 - 139{,}4 \cdot 1271{,}223}{21 \cdot 1143{,}74 - (139{,}4)^2} = 8{,}3253$$

$$B = \frac{21 \cdot 1271{,}223 - 188{,}32 \cdot 139{,}4}{21 \cdot 1143{,}74 - (139{,}4)^2} = 0{,}096788$$

Somit $\mu' = 8{,}3253 + 0{,}096788\,c$

und $$\mu_{rel} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{8{,}3253 + 0{,}096788\,c}{8{,}3253} = 1 + 0{,}011626\,c$$

$$\underline{\underline{\mu_{rel} = 1 + 1{,}1626\,\varphi}}$$

Das mittlere Kugelvolumen war

$$\bar{V}_T = \frac{0{,}1205}{19} = 0{,}0063421 \text{ cm}^3$$

Dies entspricht dem mittleren Teilchendurchmesser

$$\bar{D}_T = 0{,}2297 \text{ cm}$$

Daraus das Verhältnis:

$$\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}} = \frac{0{,}2297}{0{,}2788} = 0{,}8239$$

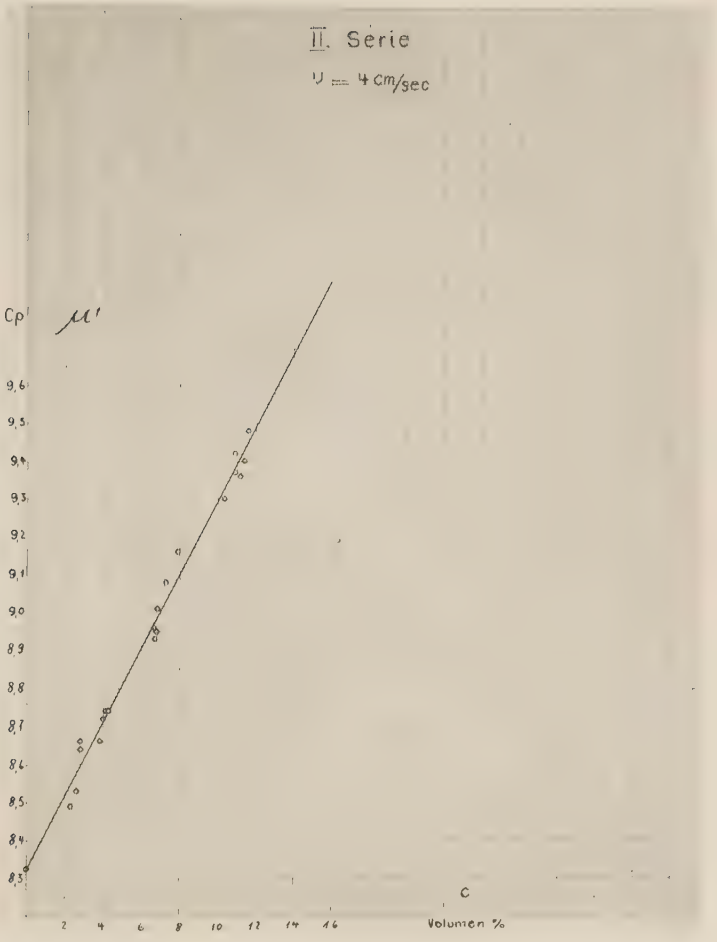

II. Serie
v = 4 cm/sec
Cp
μ'
9,6
9,5
9,4
9,3
9,2
9,1
9,0
8,9
8,8
8,7
8,6
8,5
8,4
8,3
2
4
6
8
10
12
14
16
c
Volumen %

Tabelle III

h cm	t sec	V cm³	v cm³	$\bar{u}$ cm/sec	μ' Cp	c Vol.%	Teilchen-zahl	VT cm³ 0,00
9,3	360	45,3	1,0	2,06	8,64	2,2	210	476
9,27	480	60,0	1,5	2,05	8,68	2,5	280	536
9,4	180	22,7	0,6	2,07	8,73	2,64	105	571
9,42	480	60,1	2,4	2,05	8,81	3,99	373	643
9,42	480	60,0	2,4	2,05	8,82	4,00	373	643
9,9	480	62,5	3,7	2,13	8,90	5,92	688	538
9,72	300	38,4	2,3	2,10	8,88	6,0	430	535
9,5	480	59,8	3,8	2,04	8,92	6,36	688	552
9,32	180	22,0	1,4	2,00	8,92	6,37	258	543
9,82	360	45,8	3,2	2,08	9,03	7,0	678	472
9,65	300	37,4	2,7	2,04	9,05	7,22	565	478
10,17	120	16,0	1,2	2,19	8,93	7,5	226	531
9,6	300	36,7	3,2	2,00	9,2	8,72	690	465
9,92	360	44,8	4,1	2,04	9,33	9,15	696	590
9,67	120	15,2	1,4	2,08	8,95	9,22	276	508
9,95	300	37,5	3,5	2,05	9,32	9,34	580	604
9,47	120	14,6	1,4	2,00	9,12	9,60	276	508
9,82	120	14,6	1,4	2,00	9,45	9,60	232	604
10,25	360	46,0	5,4	2,10	9,38	11,7	1032	522
10,07	120	15,2	1,8	2,08	9,31	11,84	350	514
10,02	480	60,2	7,4	2,05	9,34	12,3	1400	529
9,95	300	37,1	4,6	2,03	9,42	12,4	875	526
10,05	300	37,0	4,8	2,02	9,54	12,98	860	558
10,15	300	37,8	5,1	2,06	9,42	13,5	930	548
10,07	480	59,6	8,1	2,03	9,5	13,6	1488	545
10,07	120	14,7	2,1	2,01	9,62	14,28	372	565
10,5	240	30,6	4,5	2,09	9,63	14,7	904	498
10,25	360	43,5	6,4	1,98	9,93	14,7	1032	620
10,35	360	45,4	6,8	2,07	9,60	14,98	1356	501
10,0	300	35,0	5,4	1,91	10,0	15,42	860	628
10,22	120	14,9	2,3	2,03	9,63	15,44	452	509
10,8	180	23,7	4,1	2,16	9,6	17,3	828	495
10,7	300	37,3	6,7	2,04	10,08	18,0	1130	593
10,75	480	59,8	10,9	2,04	10,1	18,24	1808	603
11,25	360	47,8	8,9	2,18	9,92	18,6	1656	538
10,9	300	37,1	6,9	2,03	10,31	18,6	1130	610
10,92	240	32,0	6,0	2,18	9,57	18,76	1104	544
11,02	480	59,8	11,4	2,04	10,36	19,1	1808	631
10,62	180	21,5	4,2	1,96	10,4	19,5	678	620
10,95	480	60,5	12,0	2,06	10,16	19,85	2208	543
10,62	240	28,8	5,8	1,97	10,38	20,16	1104	525
10,87	120	15,1	3,2	2,06	10,1	21,2	567	555
10,17	120	13,7	2,9	1,87	10,42	21,2	552	525
10,45	360	43,0	9,6	1,96	10,23	22,35	1728	555
10,72	180	22,2	5,3	2,02	10,17	23,9	864	614
9,02	180	22,8			8,33			
8,95	120	14,8			8,49			
8,86	180	22,2			8,40			
10,57	120	17,6			8,44			
10,5	120	17,4			8,47			

III. Serie.

Mittlere Strömungsgeschwindigkeit: $u = 2$ cm/sec

Resultate der Summenbildungen:

$$\begin{aligned} n &= 50 \\ \Sigma\,\mu' &= 469{,}93 \\ \Sigma\,c &= 572{,}2 \\ \Sigma\,c^2 &= 8858{,}68 \\ \Sigma\,c\,\mu' &= 5574{,}84 \end{aligned} \qquad \Sigma\,V_T = 0{,}24811 \text{ cm}^3$$

Einsetzen ergibt:

$$A = \frac{469{,}93 \cdot 8858{,}68 - 572{,}2 \cdot 5574{,}84}{50 \cdot 8858{,}68 - (572{,}2)^2} = 8{,}423$$

$$B = \frac{50 \cdot 5574{,}84 - 469{,}93 \cdot 572{,}2}{50 \cdot 8858{,}68 - (572{,}2)^2} = 0{,}08525$$

Somit $$\mu' = 8{,}423 + 0{,}08525\,c$$

und $$\mu_{rel} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{8{,}423 + 0{,}08525\,c}{8{,}423} = 1 + 0{,}010121\,c$$

$$\underline{\underline{\mu_{rel} = 1 + 1{,}0121\,\varphi}}$$

Mittleres Teilchenvolumen:

$$\overline{V}_T = \frac{0{,}24811}{45} = 0{,}0055135 \text{ cm}^3$$

Mittlerer Teilchendurchmesser:

$$\overline{D}_T = 0{,}2191 \text{ cm}$$

Verhältnis:

$$\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}} = \frac{0{,}2191}{0{,}2788} = 0{,}7859$$

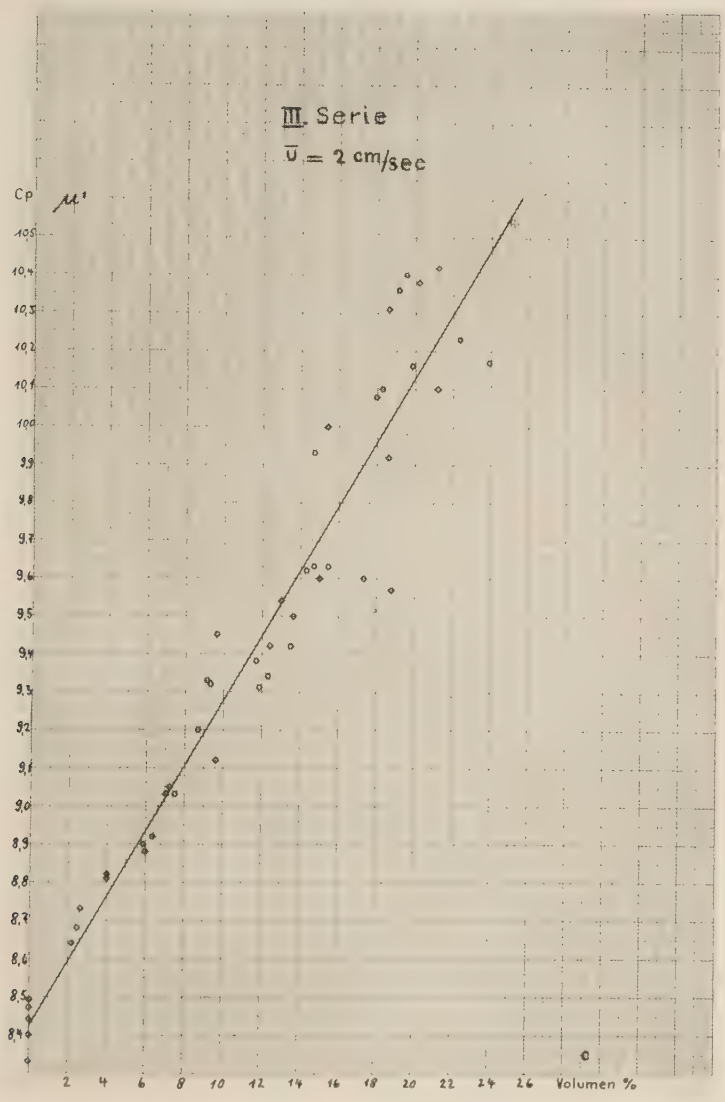

III. Serie
$\bar{v}$ = 2 cm/sec
Cp
μ'
10,5
10,4
10,3
10,2
10,1
10,0
9,9
9,8
9,7
9,6
9,5
9,4
9,3
9,2
9,1
9,0
8,9
8,8
8,7
8,6
8,5
8,4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
Volumen %
c

Tabelle IV

h cm	t sec	V cm³	v cm³	$\bar{u}$ cm/sec	μ' Cp	c Vol.%	Teilchen-zahl	VT cm³ 0,00
2,77	600	19,4	2,65	0,530	10,04	13,66	387	685
2,63	480	14,3	2,15	0,488	10,32	15,04	309	696
3,24	480	17,5	2,75	0,597	10,4	15,7	459	600
3,02	480	16,2	2,65	0,553	10,48	16,36	373	710
2,59	480	14,0	2,35	0,478	10,4	16,8	309	760
3,00	480	16,15	2,75	0,551	10,42	17,0	459	600
2,9	480	15,0	2,60	0,512	10,85	17,32	373	697
2,83	480	14,8	2,60	0,505	10,75	17,57	373	697
2,77	480	14,2	2,55	0,485	10,97	17,98	373	683
3,01	480	14,95	3,1	0,510	11,31	20,73	459	676
3,2	480	15,5	3,45	0,529	11,6	22,26	459	753
3,15	480	15,25	3,45	0,520	11,6	22,6	459	753
2,96	600	17,5	4,0	0,478	11,87	22,82	573	698
3,10	480	14,9	3,45	0,508	11,68	23,19	459	753
3,29	240	8,2	1,9	0,559	11,27	23,2	280	680
3,12	480	14,85	3,45	0,507	11,8	23,2	459	753
3,07	480	14,55	3,4	0,497	11,86	23,4	459	741
3,62	480	17,9	4,45	0,611	11,37	24,85	688	647
3,28	480	15,9	3,95	0,543	11,58	24,85	560	705
3,39	240	8,4	2,2	0,573	11,33	26,2	280	786
3,11	480	14,8	3,95	0,505	11,8	26,7	560	705
3,67	480	17,5	4,7	0,597	11,78	26,85	688	684
3,51	321	10,6	2,9	0,540	12,46	27,4	460	630
3,21	480	15,1	4,15	0,515	11,93	27,48	560	740
3,26	480	15,4	4,3	0,526	11,9	27,94	560	768
3,57	540	18,4	5,15	0,558	12,28	28,0	774	665
3,71	362	12,8	3,65	0,580	12,25	28,53	519	703
3,64	289	9,8	2,8	0,555	12,6	28,6	414	677
3,16	480	14,8	4,25	0,505	11,99	28,7	560	759
3,02	480	13,8	4,15	0,471	12,3	30,1	560	740
3,02	300	12,3			8,63			
4,72	240	15,6			8,5			
4,67	240	15,6			8,42			
4,61	240	15,5			8,36			
2,48	420	14,4			8,48			
2,46	360	12,1			8,56			
3,96	180	9,7			8,6			
3,86	240	12,95			8,38			

IV. Serie.

Mittlere Strömungsgeschwindigkeit: $u = 0{,}5$ cm/sec

Resultate der Summenbildungen:

$$\begin{aligned} n &= 38 \\ \Sigma\,\mu' &= 411{,}12 \\ \Sigma\,c &= 685{,}2 \\ \Sigma\,c^2 &= 16343{,}38 \\ \Sigma\,c\,\mu' &= 7932{,}442 \end{aligned} \qquad \Sigma\,V_T = 0{,}21144 \text{ cm}^3$$

Einsetzen ergibt:

$$A = \frac{411{,}12 \cdot 16343{,}38 - 685{,}2 \cdot 7932{,}442}{38 \cdot 16343{,}38 - (685{,}2)^2} = 8{,}4712$$

$$B = \frac{38 \cdot 7932{,}442 - 411{,}12 \cdot 685{,}2}{38 \cdot 16343{,}38 - (685{,}2)^2} = 0{,}13021$$

Somit $$\mu' = 8{,}4712 + 0{,}13021\,c$$

$$\mu_{rel} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{8{,}4712 + 0{,}13021\,c}{8{,}4712} = 1 + 0{,}015371\,c$$

$$\underline{\underline{\mu_{rel} = 1 + 1{,}5371\,\varphi}}$$

Mittleres Teilchenvolumen:

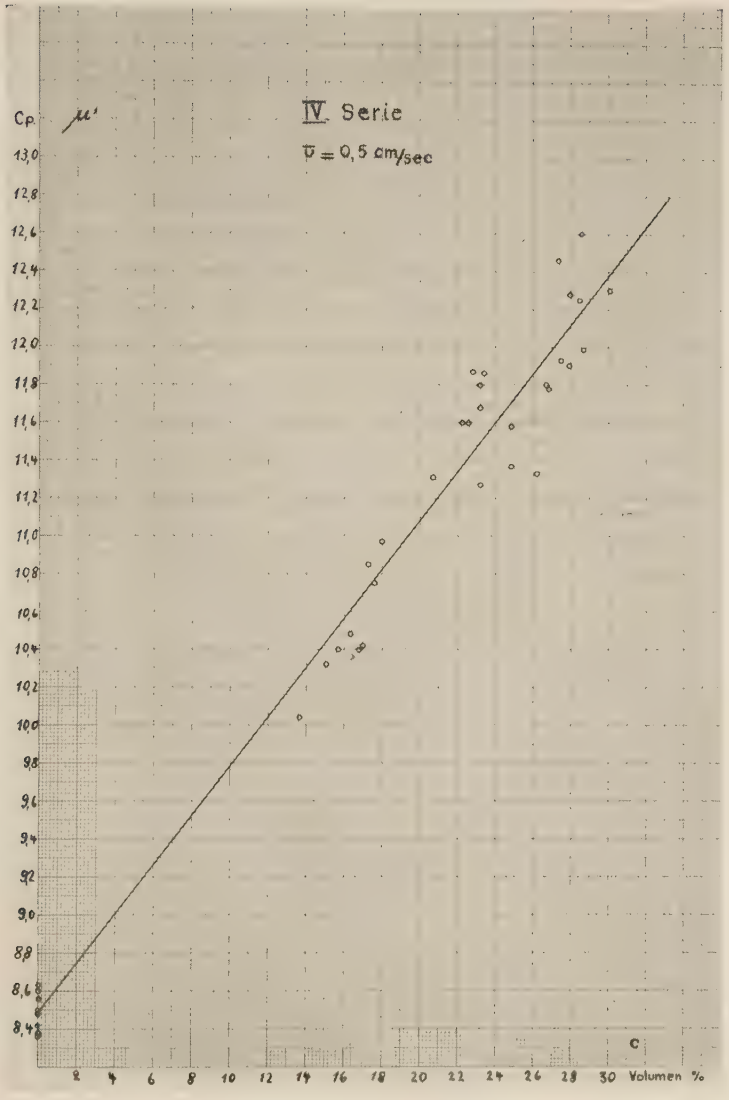
$$\bar{V}_T = \frac{0{,}21144}{30} = 0{,}007048 \text{ cm}^3$$

Mittlerer Teilchendurchmesser:

$$\bar{D}_T = 0{,}2379 \text{ cm}$$

Verhältnis:

$$\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}} = \frac{0{,}2379}{0{,}2788} = 0{,}8533$$


Cp.
μ'
IV. Serie
v = 0,5 cm/sec
13,0
12,8
12,6
12,4
12,2
12,0
11,8
11,6
11,4
11,2
11,0
10,8
10,6
10,4
10,2
10,0
9,8
9,6
9,4
9,2
9,0
8,8
8,6
8,4
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 Volumen %
c

Zusammenstellung der Ergebnisse.

Benützte Röhre: $l = 141{,}1$ cm; $d = 0{,}2788$ cm

Messungen mit der ersten Suspension.

Suspensionsmittel: Wasser-Glyceringemisch ($\mu = 1{,}7\ Cp$)

Zusatzkörper: Gemisch von Paraffinöl, *O*-Dichlorbenzol und geschmolzenem Paraffin ($\mu = 7{,}3\ Cp$)

I. Serie:	Mittl. Geschwindigkeit	4 cm/sec
	Mittl. Teilchendurchmesser	0,2194 cm
	Verhältnis: $\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}}$	0,7870

$$\mu_{rel} = 1 + 1{,}1298\,\varphi$$

Messungen mit der zweiten Suspension.

Suspensionsmittel: Wasser-Glyceringemisch ($\mu = 8{,}5\ Cp$)

Zusatzkörper: Gemisch von Dibromstearinsäure, Paraffinöl und geschmolzenem Paraffin ($\mu = 395\ Cp$)

II. Serie:	Mittl. Geschwindigkeit	4 cm/sec
	Mittl. Teilchendurchmesser	0,2297 cm
	Verhältnis: $\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}}$	0,8239

$$\mu_{rel} = 1 + 1{,}1626\,\varphi$$

III. Serie:	Mittl. Geschwindigkeit	2 cm/sec
	Mittl. Teilchendurchmesser	0,2191 cm
	Verhältnis: $\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}}$	0,7859

$$\mu_{rel} = 1 + 1{,}0121\,\varphi$$

IV. Serie:	Mittl. Geschwindigkeit	0,5 cm/sec
	Mittl. Teilchendurchmesser	0,2379 cm
	Verhältnis: $\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}}$	0,8533

$$\mu_{rel} = 1 + 1{,}5371\,\varphi$$

Die angegebenen Werte für die mittl. Teilchendurchmesser wurden aus den mittl. Teilchenvolumina berechnet unter der Annahme, es handle sich um kugelförmige

Ölteilchen. Bei großen Strömungsgeschwindigkeiten konnte aber schon mit bloßem Auge eine Deformation der Ölteilchen im Sinne stromlinienförmiger Tropfen beobachtet werden, so daß während der Strömung die für die „Viskositätserhöhung" ins Gewicht fallenden Teilchendurchmesser kleiner sein mußten als die berechneten.

Diskussion der Ergebnisse.

Die lineare Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Konzentration bei der untersuchten Strömung muß als bemerkenswertes Resultat bewertet werden, wenn man diese Arbeit mit ähnlichen Strömungsuntersuchungen vergleicht.

So fand A. Müller bei Kautschuksuspensionen[1]) eine annähernde Linearität der „Zähigkeit"-Konzentrationskurve nur bis etwa 5%, um bei Konzentrationen über 5% eine Exponentialfunktion festzustellen. Es handelte sich dabei ebenfalls um Messungen mit verdünntem Glycerin, dem zylindrische Gummischeibchen mit einem Durchmesser von 0,3 cm und einer Dicke von 0,055 cm zugesetzt wurden.

Bei Versuchen mit Kohle-Glycerinsuspensionen[2]) konnte sogar nur bei Konzentrationen von 0,07 bis 0,7% eine Linearität festgestellt werden.

Ebenfalls ergaben Messungen der Viskosität von Ölkugelsuspensionen[3]) mit der, in dieser Arbeit beschriebenen Apparatur, konkav nach oben gekrümmte Kurven, wenn die Kugeln schwerer oder leichter waren als das Suspensionsmittel und somit die rollende Reibung mitspielte.

Linearität und Parabelprofil.

Da wegen der linearen Abhängigkeit der „Viskosität" von der Konzentration jede Kugel einen konstanten Beitrag zur Erhöhung der Reibung leistet, so muß angenommen werden, daß jede Kugel an der Stelle des Rohres, wo sie sich gerade befindet, das Parabelprofil zwar verunmöglicht, auf die übrige Geschwindigkeitsverteilung aber keinen Einfluß haben kann. Daraus folgt, daß außerhalb eines kleinen Bereiches jeder Kugel das parabelförmige Strömungsprofil sich sofort wieder von neuem bildet. Nur so läßt sich erklären, weshalb jede Kugel, die zusätzlich der Suspension zugegeben wird, den Gesamtwiderstand um einen konstanten Bruchteil erhöht. Würde nämlich zwischen zwei Kugeln nicht mehr das Parabelprofil, also das Profil der kleinsten Reibung hergestellt, so könnte durch Zugabe einer weiteren Kugel auch nicht mehr der gleiche Effekt erreicht werden.

Die Annahme des Parabelprofils wurde auch durch direkte Beobachtung der Strömung gerechtfertigt. Befanden sich kleine Ölkügelchen oder andere sichtbare

---

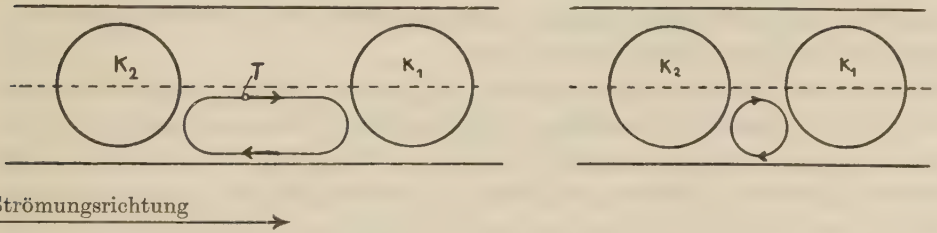
[1]) A. Müller, Abh. z. Mech. der Flüssigk. Fasz. I, S. 111ff.; Verlag Universitäts-Buchhandlung, Fryburg 1936.

[2]) A. Müller, Arch. Kreislaufforschg **4**, 327 (1941).

[3]) P. Heinrich, Strömen v. Gemischen m. Teilchen gleicher Größenordnung wie der Röhrendurchmesser, Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Nat. — Vol. XXXVII.

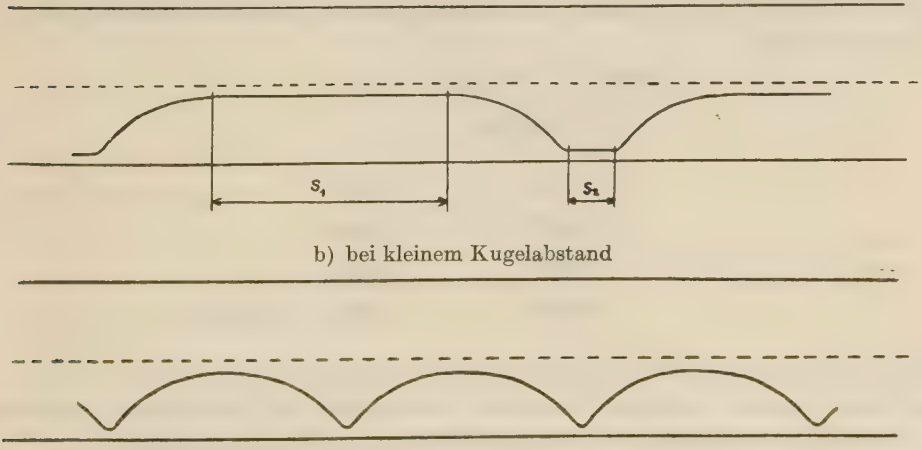
Verunreinigungen im Suspensionsmittel, so konnten die Stromlinien verfolgt werden. Beobachtete man die Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei Kugeln K_1 und K_2 (Fig. 3a), so stellte man fest, daß sich ein Teilchen T in der Nähe der Achse von der Kugel K_2 gegen die Kugel K_1 hinbewegte. In der Nähe der Kugel K_1 bog es halbkreisförmig gegen die Rohrwand hin ab und bewegte sich in entgegengesetzter Richtung parallel der Rohrwand wieder gegen die Kugel K_2. Dort bog es wieder von seiner geradlinigen Bahn gegen die Rohrachse hin ab, und begann von neuem seine „Planetenbahn". Waren die Ölkugeln K_1 und K_2 sehr nahe (Fig. 3b), so wurden

Fig. 3. Bahn eines Teilchens T inbezug auf ein mit den Kugeln bewegtes Koordinatensystem
a) bei großem Kugelabstand b) bei kleinem Kugelabstand



kreisförmige Bahnen beschrieben. Die Transformation der Bewegung von dem mit den Kugeln K_1 und K_2 bewegten Koordinatensystem zu einem mit dem Rohre feststehenden Koordinatensystem ergibt die in Fig. 4a und b gezeichneten Bahnen.

Fig. 4. Bahn eines Teilchens inbezug auf ein relativ zur Glasröhre ruhendes Koordinatensystem
a) bei großem Kugelabstand



Die Kurven stellen außerhalb der achsenparallelen Bewegungen verkürzte Zykloiden dar. Da die Wegstücke s_1 und s_2 in gleichen Zeiten zurückgelegt wurden, folgt daraus, daß die achsennahen Flüssigkeitsteilchen außerhalb der Kugeln große Geschwindig-

keiten, die wandnahen kleine Geschwindigkeiten besaßen, im Einklang mit dem Parabelprofil.

Bemerkenswert ist die ermittelte, erstaunlich kleine Zunahme des Strömungswiderstandes bei der untersuchten Strömungsart. Die umstehend erwähnten Versuche mit Kautschuksuspensionen zeigten eine „Viskositäts"-Steigerung einer 8%igen Suspension gegenüber dem Suspensionsmittel um 15—40%, während eine 8%ige Kohlesuspension eine Steigerung um 200—500% ergab. Die hier durchgeführten Meßserien ergaben eine Zunahme um 8—19% für eine 8%ige Suspension.

Die Viskosität des Zusatzkörpers scheint keinen Einfluß auf die Gesamtreibung auszuüben, war doch in der ersten Serie die Viskosität des Zusatzkörpers 7,3 *Cp*, in der zweiten Serie 395 *Cp*. Die Resultate waren aber nicht nennenswert verschieden. Es konnte auch trotz gelegentlicher Verunreinigungen des Öles nie eine Strömung im Innern der Öltropfen beobachtet werden.

Es muß die betrachtete Strömungsart als glänzende Methode aufgefaßt werden, den Durchgang starkviskoser Flüssigkeiten durch eine Röhre zu ermöglichen. Man bedient sich eines Suspensionsmittels von kleiner Viskosität. Der hochviskose Stoff wird im Gleitmittel nicht etwa möglichst fein verteilt, wie man annehmen könnte, sondern man läßt ihn „tropfenweise" vom niederviskösen Stoff durch die Leitung transportieren. Die beim Strömen entstehende Reibung wird so ganz vom niederviskösen Stoff übernommen und bleibt somit ein Minimum.

Die aufgenommenen Versuchsreihen ergaben alle ein Resultat von der Form:

$$\mu_{rel} = 1 + K\varphi$$

Der Vergleich zeigt aber einen unterschiedlichen Wert des Faktors K. Die Gegenüberstellung des Verhältnisses: Teilchendurchmesser/Rohrdurchmesser und des Faktors K ergibt:

$\frac{\text{Teilchendurchmesser}}{\text{Rohrdurchmesser}}$	K
0,7859	1,0121
0,7870	1,1298
0,8239	1,1626
0,8533	1,5371

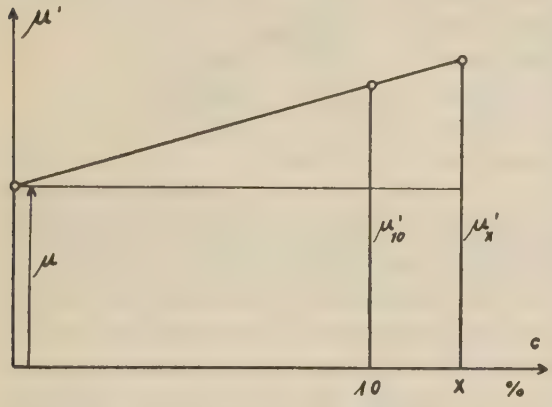
Eine Abhängigkeit der beiden Zahlenreihen ist somit offenbar, und es drängt sich die Frage nach der Gesetzmäßigkeit dieser Abhängigkeit auf. K ist also eng verknüpft mit dem Rohrdurchmesser D_R und dem Teilchendurchmesser D_T. Es ist:

$$K = K\,(D_R, D_T) \tag{33}$$

Es wird nun versucht, die noch unbekannte Funktion aufzufinden.

Einfluß der Teilchengröße.

Der experimentelle Teil der Lösung dieser Frage erforderte die Durchführung einer fünften Meßreihe. Als Versuchsflüssigkeit diente wieder ein Wasser-Glycerin-gemisch von der Viskosität 8,3 *Cp*. Die Zusatzflüssigkeit war die gleiche wie in der 2., 3. und 4. Serie. Es wurde eine 10%ige Suspension gewählt. Bei einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit von 2 cm/sec wurden bei allen Versuchen in gleichen Zeiten gleiche Ölvolumina suspendiert. Durch Variation der Abschlagzahlen wurden kleine und große Kugeln hergestellt, die folglich kleine und große Abstände voneinander hatten. Im übrigen wurde gleich vorgegangen wie in den ersten Serien. Die Resultate sind in der Tabelle V zusammengestellt. Es war nicht möglich den Prozentgehalt genau einzuhalten. Als Ergebnis der Messungen lag vielmehr eine große Anzahl „Viskositätswerte" von Suspensionen vor, deren Konzentration bald größer, bald kleiner als 10% waren. Da sich aus den bisherigen Versuchen der Strömungswiderstand als eine lineäre Funktion der Konzentration herausstellte, so konnten die Ergebnisse leicht auf 10% umgerechnet werden. Wie aus nebenstehender Figur folgt, kann aus dem Wert der „Zähigkeit" μ'_x einer X%igen Suspension die „Zähigkeit" μ'_{10} einer 10%igen Suspension erhalten werden, denn es verhält sich:



$$\frac{\mu'_{10}-\mu}{\mu'_x-\mu} = \frac{10}{X}$$

Es folgt:

$$\mu'_{10}-\mu = (\mu'_X-\mu)\cdot\frac{10}{x}$$

Division durch μ ergibt:

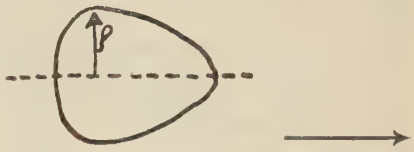
$$\frac{\mu'_{10}-\mu}{\mu} = \frac{\mu'_x-\mu}{\mu}\cdot\frac{10}{x}$$

Wir erhalten schließlich die Formel:

$$\mu_{\underset{10\%}{rel}} = 1+\frac{\mu'_x-\mu}{\mu}\cdot\frac{10}{x} \qquad (34)$$

Formel (34) erlaubt, aus den vorhandenen Meßergebnissen die auf 10%ige Suspensionen korrigierten relativen Viskositäten zu berechnen. Die Resultate sind in der letzten Kolonne der Tabelle V notiert. Im graphischen Schema sind sie als ∘ eingetragen. Als Ordinaten sind die relativen Viskositäten eingezeichnet, als Abszissen

die Teilchenradien, berechnet aus den Teilchenvolumina, wobei Kugelform angenommen wurde. Die Punkte bestimmen die Kurve I; sie hat $\int$-Form. Bei kleinen Teilchen ergibt sich eine geringe Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von der Teilchengröße. Mit zunehmendem Teilchenradius steigt der Strömungswiderstand immer mehr an. Bei einer Abszisse von etwa 0,128 cm hat die Kurve einen Wendepunkt. Von hier ab wird der Einfluß der wachsenden Teilchenradien wieder geringer. 0,1394 cm entspricht dem Rohrradius. Die Tatsache, daß noch Punkte oberhalb dieses Wertes gefunden werden konnten, zeigt, daß es sich nicht um kugelförmige Ölteilchen handeln konnte. Tatsächlich konnte die Deformation auch augenscheinlich wahrgenommen werden. Je nach der Strömungsgeschwindigkeit nahm der Öltropfen mehr oder weniger die Form des nebenstehend, im Längsschnitt gezeichnetenKörpers an.



Nun kann angenommen werden, daß für die Reibungserhöhung weniger der Radius r des als Kugel gedachten Ölteilchens verantwortlich ist, als vielmehr der größte Durchmesser 2ϱ des Öltropfens quer zur Strömungsrichtung. In der 7. Kolonne der Tabelle V sind die bei jedem Versuch direkt gemessenen Teilchengeschwindigkeiten u_T eingetragen. Da wie stets beobachtet, kleine Teilchen schnell, größere sich aber langsamer fortbewegten, so mußte durch Messung der Teilchengeschwindigkeit dessen Querdurchmesser bestimmbar sein, sobald die Beziehung zwischen Teilchengeschwindigkeit und -durchmesser bekannt war.

Berechnung der Teilchengeschwindigkeit.

Es sei eine stationäre Strömung vorausgesetzt. An jeder Stelle des Rohres besteht fortwährend der gleiche sekundliche Durchfluß. Das Paraboloid ADA der Figur 5a enthalte die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren von den Flüssigkeitsteilchen des Querschnittes AA. In der Ableitung der Poiseuille'schen Gleichung erhielt man für die Geschwindigkeit die Gleichung (4):

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\,\mu\,l}\,(R^2 - r^2)$$

Ersetzt man den Wert $\frac{p_1 - p_2}{4\,\mu\,l}$ durch k, so folgt:

$$u = k\,(R^2 - r^2) \qquad (35)$$

Das Volumen des Rotationsparaboloids ist:

$$V = 2\,\pi \int_0^R r\,u\,dr = 2\,\pi\,k \int_0^R r\,(R^2 - r^2)\,dr = 2\,\pi\,k\,\left[\frac{(r^2\,R^2}{2} - \frac{r^4)}{4}\right]$$

$$V = \frac{\pi\,k}{2}\,R^4 \qquad (36)$$

V stellt das sekundlich durch den Querschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen dar. Nun befindet sich eine Kugel mit dem Radius ϱ an der Stelle AA (Fig. 5b). Die

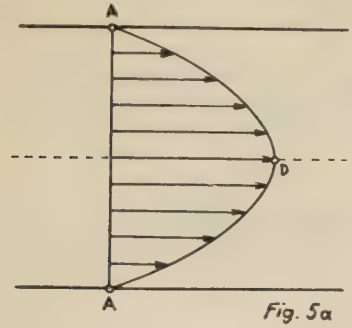


Fig. 5a

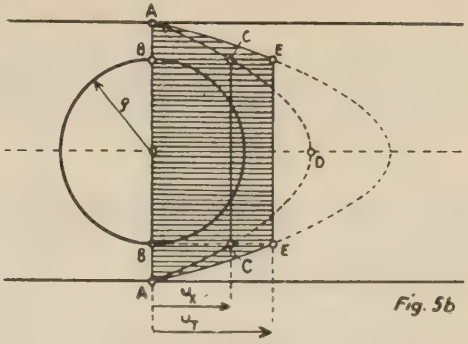


Fig. 5b

Punkte innerhalb BB können nicht mehr diemit dem Orte veränderlichen Geschwindigkeiten aufrecht erhalten. Vom Rotationsparaboloid ADA wird somit die Kappe CDC abgeschnitten. Ihr Volumen ist:

$$V' = 2\pi \int_0^{\varrho} r\, u'\, dr$$

wobei: $u' = u - u_x = k(R^2 - r^2) - k(R^2 - \varrho^2) = k(\varrho^2 - r^2)$

(u_X ist die Geschwindigkeit des Punktes B bei ungestörtem Profil.)

Eingesetzt:

$$V' = 2\pi k \int_0^{\varrho} r\,(\varrho^2 - r^2)\, dr = \frac{\pi k}{2}\, \varrho^4 \qquad (37)$$

An der Stelle einer Kugel würde also nur noch ein sekundlicher Durchfluß entsprechend dem Volumen V_x des Restparaboloids $ACCA$ (siehe (36) und (37).)

$$V_x = V - V' = \frac{\pi k}{2}\,(R^4 - \varrho^4) \qquad (38)$$

herrschen.

Das Kontinuitätsgesetz verlangt aber für jeden Querschnitt das gleiche Durchflußvolumen. An der Stelle einer Kugel mußte somit das abgeschnittene Geschwindigkeitsprofil $ACCA$ gestreckt werden. Das Volumen dieses gestreckten Rotationskörpers $AEEA$ (schraffiert) muß gleich dem Volumen V des ursprünglichen Paraboloids ADA werden. Die Streckung geschieht dermaßen, daß

$$\frac{u_T}{u_x} = \frac{V}{V_x} \qquad (39)$$

(Die beiden abgestumpften Paraboloide $ACCA$ und $AEEA$ haben die gleiche Grundfläche. Ihre Volumina verhalten sich also wie ihre Höhen.)

Wird nach u_T, der gesuchten Teilchengeschwindigkeit aufgelöst, so erhält man unter Berücksichtigung von (35), (36) und (38):

$$u_T = k\,(R^2 - \varrho^2)\,\frac{\frac{\pi k}{2} R^4}{\frac{\pi k}{2}(R^4 - \varrho^4)}$$

$$= k\,(R^2 - \varrho^2)\,\frac{R^4}{(R^2+\varrho^2)\,(R^2-\varrho^2)} = \frac{k\,R^4}{R^2+\varrho^2}$$

Nun folgt aus (35), wenn $r = 0$:

$$u_{max.} = k\,R^2$$

Somit erhält man für die Teilchengeschwindigkeit:

$$u_T = u_{max.}\,\frac{R^2}{R^2+\varrho^2} \tag{40}$$

Wird diese Gleichung nach ϱ aufgelöst und berücksichtigt man, daß die maximale Geschwindigkeit gleich der doppelten mittleren Geschwindigkeit ist, so ergibt sich:

$$\varrho = R\,\sqrt{\frac{2\,\bar{u}}{u_T} - 1} \tag{41}$$

Diese Gleichung erlaubt, aus der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und der Teilchengeschwindigkeit den Teilchenradius zu berechnen. Handelt es sich um nicht kugelförmige Öltropfen, so kann mittels Formel (41) der größte Tropfendurchmesser quer zur Strömungsrichtung berechnet werden, während eine direkte Messung nicht leicht ausführbar wäre.

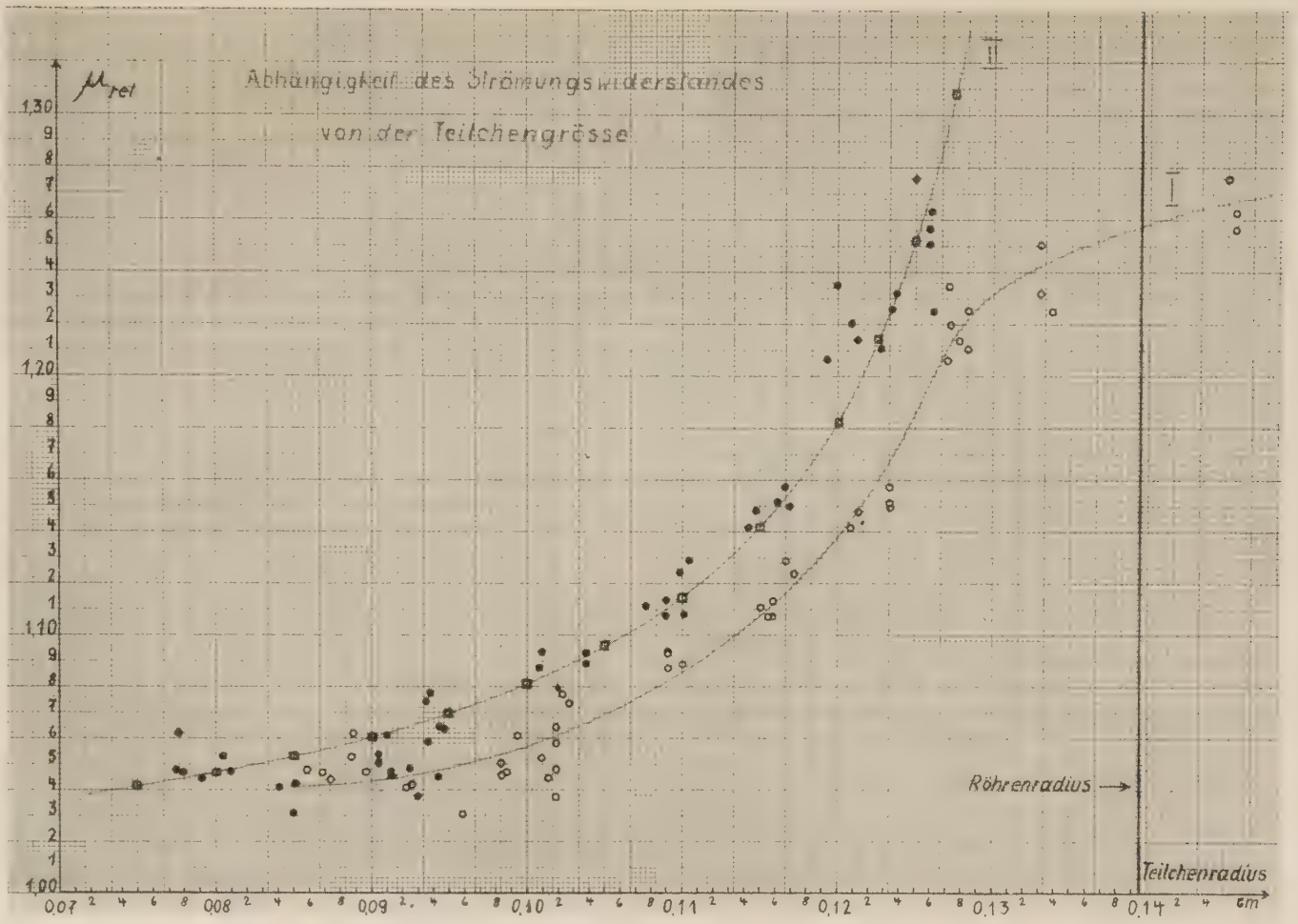
In der Tabelle V stehen in der 12. Kolonne die aus den Ölvolumina nach Formel (23) berechneten Radien r, die wegen der Deformation nur als mittlere Tropfenradien zu werten sind. In der 13. Kolonne stehen die Tropfenradien ϱ quer zur Strömungsrichtung, welche kleiner sind als die ersteren und nach Formel (41) berechnet sind. Im graphischen Schema sind die relativen Viskositäten mit den Querradien ϱ der deformierten Teilchen als Abszissen mittels • eingezeichnet. Die Differenzen $r - \varrho$ ergeben ein Maß für die Deformationen, und es zeigt sich, daß sie besonders bei großen Teilchen beträchtlich groß sind, so daß es verständlich wird, warum die Zunahme des Strömungswiderstandes nicht mehr im gleichen Verhältnis mit der volumenmäßigen Zunahme der Teilchengröße steht. Die • deuten die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes von den Querdimensionen der Teilchen an.

Tabelle V

Vers. Nr.	h cm	t sec	V cm^3	v cm^3	$\bar{u}$ cm/sec	u_T cm/sec	μ' Cp	c Vol. %	Teilchen-zahl	V_T cm^3 0,0	r cm	ρ cm	μ_{rel} 10%
1	9,19	300	37,0	3,8	2,02	3,09	8,71	10,27	1440	0264	0,0858	0,0775	1,0481
2	9,36	300	37,7	3,95	2,06	3,14	8,71	10,47	1440	0274	0,0869	0,0780	1,0472
3	9,57	300	38,7	4,0	2,11	3,19	8,68	10,32	1440	0278	0,0872	0,0792	1,0444
4	9,24	300	37,0	3,3	2,02	3,06	8,76	8,92	1130	0292	0,0887	0,0776	1,0621
5	9,075	300	36,6	3,3	2,00	3,00	8,70	9,02	1130	0292	0,0887	0,0805	1,0534
6	9,46	300	38,4	3,4	2,10	3,14	8,65	8,85	1130	0301	0,0896	0,0810	1,0476
7	9,47	300	38,5	3,7	2,10	3,08	8,63	9,62	1130	0328	0,0922	0,0841	1,0413
8	9,36	300	38,0	3,75	2,08	3,03	8,65	9,87	1130	0332	0,0926	0,0851	1,0427
9	9,615	300	39,7	3,2	2,17	3,16	8,51	8,06	860	0372	0,0961	0,0850	1,0313
10	9,20	300	37,2	3,7	2,03	2,84	8,68	9,95	930	0398	0,0983	0,0913	1,0460
11	9,19	300	37,0	3,7	2,02	2,84	8,72	10,00	930	0398	0,0983	0,0904	1,0506
12	9,315	300	37,6	3,75	2,05	2,87	8,69	9,98	930	0403	0,0987	0,0913	1,0471
13	9,525	330	41,7	4,2	2,07	2,90	8,81	10,06	1023	0410	0,0993	0,0910	1,0611
14	9,985	300	40,2	3,7	2,2	3,10	8,71	9,21	860	0430	0,1009	0,0904	1,0536
15	9,36	300	37,9	3,75	2,07	2,84	8,67	9,90	860	0436	0,1013	0,0943	1,0450
16	9,13	300	37,2	3,8	2,03	2,81	8,62	10,20	860	0442	0,1018	0,0930	1,0377
17	9,47	300	38,2	3,8	2,09	2,90	8,70	9,95	860	0442	0,1018	0,0925	1,0484
18	9,66	300	38,4	3,8	2,10	2,88	8,83	9,90	860	0442	0,1018	0,0944	1,0645
19	9,66	300	38,6	3,8	2,11	2,91	8,78	9,85	860	0442	0,1018	0,0937	1,0587
20	9,60	300	37,6	3,85	2,05	2,85	8,96	10,23	860	0448	0,1022	0,0939	1,0777
21	9,60	300	38,3	3,6	2,09	2,86	8,80	9,40	802	0448	0,1022	0,0946	1,0641
22	9,44	300	37,0	3,9	2,02	2,79	8,95	10,53	860	0454	0,1027	0,0935	1,0744
23	9,87	300	38,2	3,8	2,09	2,69	9,07	9,95	700	0543	0,1091	0,1038	1,0932
24	9,80	300	37,9	3,8	2,07	2,72	9,08	10,02	700	0543	0,1091	0,1010	1,0938
25	9,60	300	37,3	3,8	2,04	2,68	9,04	10,18	700	0543	0,1091	0,1008	1,0876
26	10,00	300	38,8	3,9	2,12	2,73	9,04	10,04	700	0557	0,1100	0,1038	1,0888
27	9,55	300	36,3	3,7	1,98	2,48	9,24	10,20	580	0638	0,1150	0,1077	1,1110
28	9,31	300	35,4	3,65	1,93	2,40	9,22	10,30	565	0646	0,1155	0,1090	1,1076
29	9,95	270	34,3	3,3	2,08	2,56	9,16	9,61	508	0649	0,1157	0,1102	1,1078
30	9,55	285	34,4	3,5	1,98	2,46	9,26	10,18	537	0652	0,1158	0,1090	1,1136
31	10,05	300	37,5	3,85	2,05	2,52	9,40	10,27	580	0664	0,1166	0,1104	1,1291
32	9,875	300	36,9	3,9	2,01	2,48	9,39	10,58	580	0673	0,1171	0,1099	1,1241
33	10,26	330	41,5	4,35	2,06	2,46	9,53	10,48	588	0739	0,1208	0,1143	1,1414
34	10,00	300	36,3	4,0	1,98	2,36	9,65	11,00	535	0748	0,1213	0,1148	1,1479

Tabelle V

Vers. Nr.	h cm	t sec	V cm^3	v cm^3	$\bar{u}$ cm/sec	u_T cm/sec	μ' Cp	c Vol.%	Teilchenzahl	V_T cm^3 0,0	r cm	ρ cm	$\mu_{rel\,10\%}$
35	10,10	300	37,2	3,65	2,03	2,38	9,52	9,81	465	0785	0,1233	0,1170	1,1496
36	10,20	300	37,3	3 65	2,04	2,40	9,58	9,79	465	0785	0,1233	0,1167	1,1575
37	10,07	300	37,0	3,65	2,02	2,38	9,54	9,87	465	0785	0,1233	0,1162	1,1514
38	10,47	285	34,8	3,5	2,00	2,31	10,02	10,04	408	0857	0,1270	0,1193	1,2064
39	10,46	300	36,1	3,7	1,97	2,25	10,17	10,24	430	0860	0,1272	0,1209	1,2200
40	10,64	300	36,4	3,7	1,99	2,29	10,28	10,16	430	0860	0,1271	0,1200	1,2348
41	10,73	300	37,4	3,75	2,04	2,32	10,08	10,01	430	0872	0,1278	0,1213	1,2142
42	10,74	300	37,5	3,8	2,05	2,31	10,07	10,12	430	0884	0,1283	0,1228	1,2107
43	10,325	300	35,1	3,8	1,92	2,11	10,32	10,81	430	0885	0,1283	0,1262	1,2251
44	10,50	300	35,7	3,45	1,95	2,15	10,31	9,67	350	0986	0,1330	0,1260	1,2504
45	10,70	300	37,3	3,45	2,04	2,28	10,08	9,25	350	0986	0,1330	0,1238	1,2318
46	10,56	300	36,8	3,5	2,01	2,25	10,08	9,51	350	1000	0,1338	0,1236	1,2255
47	10,815	300	35,6	3,7	1,95	2,16	10,68	10,40	290	1275	0,1450	0,1251	1,2757
48	11,20	300	37,7	3,75	2,06	2,27	10,42	9,95	290	1291	0,1455	0,1259	1,2567
49	11,10	300	37,0	3,75	2,02	2,22	10,51	10,12	290	1291	0,1455	0,1261	1,2631


μ_{rel}
Abhängigkeit des Strömungswiderstandes
von der Teilchengrösse
II
I
Röhrenradius
Teilchenradius
cm

Tafel V

In folgendem sei versucht, eine mathematische Ableitung dieser Abhängigkeit durchzuführen.

Dazu ist folgende Betrachtung notwendig:

Die Konzentration an Zusatzteilchen.

Bezeichnet man die Konzentration in der Bürette mit c und die Konzentration in der Röhre mit c', so kann man sich leicht überzeugen, daß die Beziehungen gelten:

$$c = \frac{\text{Kugelabschlag pro sec} \cdot \text{Volumen einer Kugel}}{\pi R^2 u}$$

$$c' = \frac{\text{Kugelzahl pro cm} \cdot \text{Volumen einer Kugel}}{\pi R^2 \cdot 1}$$

Nun gilt: $$\text{Kugelzahl pro cm} = \frac{\text{Kugelabschlag pro sec.}}{\text{Geschw. der Kugeln}}$$

$$c' = \frac{\dfrac{\text{Kugelabschlag pro sec.}}{\text{Geschw. der Kugeln}} \cdot \text{Volumen einer Kugel}}{\pi R^2}$$

Daraus

$$\boxed{c' = c \cdot \frac{\bar{u}}{u_T}} \tag{42}$$

Es ergibt sich die merkwürdige Tatsache, daß bei dieser Strömungsart die Suspension während ihrer Passage durch die Röhre eine Konzentrationserniedrigung besteht. Aus (42) und (40) erhält man für Kugeln vom Radius ϱ als Beziehung zwischen den Konzentrationen c und c' die Formel:

$$c' = \frac{c}{2\dfrac{R^2}{R^2+\varrho^2}} \tag{43}$$

Diese außerordentlich interessante Eigenschaft ist eine logische Folgerung des nicht ebenen Strömungsprofils. Um eine Vorstellung über die Größe dieser Konzentrationserniedrigung zu erhalten, seien einige Messungen aus der Serie V entnommen und in der folgenden Tabelle Va die Konzentrationen, wie sie in der Bürette und in der Röhre vorgekommen sind, einander gegenübergestellt.

Tabelle Va

Vers. Nr.	Teilchenvolumen cm^3	Konzentration in der Bürette	Konzentration in der Röhre	Konzentrations-erniedrigung in %
1	0,00264	10,27	6,71	34,6
5	0,00292	9,02	6,01	33,3
8	0,00332	9,87	6,78	31,3
12	0,00403	9,98	7,13	28,6
18	0,00442	9,90	7,22	27,2
23	0,00543	9,95	7,73	22,4
28	0,00646	10,30	8,29	19,6
33	0,00739	10,48	8,77	16,2
38	0,00857	10,04	8,70	13,4
46	0,01000	9,51	8,50	10,7
49	0,01291	10,12	9,21	9,0

Die letzte Kolonne gibt an, um wieviel Prozent der Bürettenkonzentration die Konzentration in der Röhre erniedrigt war.

Tabelle Va illustriert deutlich die Notwendigkeit, für die theoretische und experimentelle Strömungsuntersuchung zwischen Ruhe-Konzentration und Strömungs-Konzentration zu unterscheiden. Aus der Tabelle entnimmt man ferner, daß die Konzentrationserniedrigung deutlich abhängt von der Teilchengröße. Sie ist um so größer, je kleiner die Teilchen sind, eine Eigenschaft, die aus Formel (43) direkt entnommen werden kann. Setzt man $\varrho = R$, so folgt: $c' = c$, während als Grenzwert für nach Null strebende ϱ

$$c' = \frac{1}{2} c$$

resultiert.

Dagegen ist bei dieser speziellen Strömungsform die Konzentrationserniedrigung unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit.

Die Erscheinung der Konzentrationsveränderung als Folge der Strömung wird auch in im Verhältnis zu den Teilchen weiten Röhren auftreten, aber jedenfalls in kleinerem Ausmaß, und zwar wegen den radiären Konzentrationsunterschieden während der Strömung. Diese ändern sich mit der Strömungsgeschwindigkeit. Es muß folglich bei dieser allgemeineren Strömung die Strömungskonzentration eine Funktion der Geschwindigkeit sein.

Daß obige Betrachtungen für den lebenden Organismus tatsächlich begründet sind, zeigt eine Arbeit von Hahn, Bafour...[1]). Verfüttert man radioaktives Eisen an anämische Hunde, so erscheint es in hohem Prozentsatz in den Erythrozythen, hält sich dort längere Zeit und läßt sich verhältnismäßig einfach quantitativ erfassen. Diese Methode ergibt andere Werte für die Erythrozythenmasse als diejenigen, die sich aus der Plasmabestimmung mit Hilfe von Farbstoffen und dem Hämatokritwert aus der Jugularvene errechnen lassen. Es muß die Verteilung von Plasma

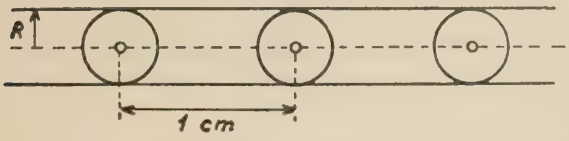
[1]) Hahn, P. F., W. M. Balfour, J. F. Ross, W. F. Bale and G. H. Whipple: Red cell volume circulating and total as determined by radio iron. Science (N. Y.) 1941 I, 87—88.

und Körperchen in den einzelnen Kreislaufregionen sehr verschieden sein, und zwar so, daß in den Kapillaren und Arteriolen der Plasmaanteil verhältnismäßig größer ist. Der für den Gesamtorganismus errechnete Hämatokritwert war stets um etwa 10% kleiner als der in der Jugularvene bestimmte.

Die geometrisch höchstmögliche Konzentration von Kugelsuspensionen, bei denen sich die Kugelmittelpunkte in der Achse der Röhre bewegen sollen, hängt ganz vom Verhältnis Röhrendurchmesser / Teilchendurchmesser ab. Für $D_R = D_T$ ist sie 66,66%. Sie beträgt aber für $D_R \,/\, D_T = 1{,}4$ nur noch 34%. Suspensionen von höherer Konzentration können also nur deshalb bei diesem Verhältnis zum Strömen gebracht werden, weil durch den Strömungsvorgang die Konzentration heruntergesetzt wird. Die Höchstkonzentration von 34% bei $D_R \,/\, D_T = 1{,}4$ entspricht der Strömungskonzentration. Die zugehörige Ruhekonzentration beträgt 45%, wie man sich durch Einsetzen in Formel (43) überzeugen kann.

Nach dieser Betrachtung über die Konzentration sei übergegangen zum Einfluß der suspendierten Teilchen auf die Erhöhung des Widerstandes.

Einfluß der Zusatzteilchen auf den Strömungswiderstand.



Man betrachte ein Rohrstück einer bestimmten Länge. Es enthalte so große Kugeln, daß diese die Rohrwand gerade berühren. Der Abstand von Kugelmittelpunkt zu Kugelmittelpunkt sei 1 cm. Dies entspricht einer bestimmten Konzentration φ und zwar ist für die benützte Röhre:

$$\varphi = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 1} = \frac{4R}{3} = \frac{4 \cdot 0{,}1394}{3} = 0{,}186 = 18{,}6\%$$

Wird das Volumen der Kugeln z mal kleiner gewählt, so muß, wenn die Konzentration gleich bleiben soll, die Anzahl der Kugeln z-mal größer werden. Es ist

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = z \,.\, \tfrac{4}{3}\pi \varrho^3$$

und

$$z = \frac{R^3}{\varrho^3}$$

Da aber die kleineren Kugeln schneller vorwärts kommen und somit die besprochene Konzentrationserniedrigung verursachen, so ergibt sich als neue Kugelzahl pro cm nicht der Wert

$$\frac{R^3}{\varrho^3}$$

sondern der kleinere

$$\frac{\frac{R^3}{\varrho^3}}{2\,\frac{R^2}{R^2+\varrho^2}} \tag{45}$$

Wie bereits besprochen wurde, muß das ursprüngliche Geschwindigkeitsprofil durch die Gegenwart einer Kugel gestreckt werden. Die Streckung, siehe (39), (36) und (38), beträgt:

$$\text{Streckung} = \frac{V}{V_x} = \frac{\frac{\pi\,k}{2}\,R^4}{\frac{\pi\,k}{2}\,(R^4-\varrho^4)} = \frac{R^4}{(R^4-\varrho^4)} \tag{46}$$

In gleichem Maße wird auch das Geschwindigkeitsgefälle gestreckt; denn dieses ist ja nichts anderes als die erste Ableitung der Funktion, die die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt charakterisiert. Die Zunahme des Geschwindigkeitsgefälles bedeutet aber einen vergrößerten Widerstand, was sich aus dem Newton'schen Reibungsgesetz

$$K = F\,\mu\,\frac{du}{dr}$$

ergibt.

Hier sei noch einmal an die Konvention erinnert, diese durch die Vergrößerung des Geschwindigkeitsgefälles verursachte Reibungserhöhung einer (in Wirklichkeit nicht vorhandenen) Vergrößerung des Faktors μ zuzuschreiben, und von erhöhter Viskosität μ' zu sprechen.

Jede Kugel verursacht in einem noch unbekannten Bereich $\frac{1}{n}$ eine Vergrößerung des Geschwindigkeitsgefälles um das $\frac{R^4}{R^4-\varrho^4}$ fache.

Auf einer Länge von $\frac{1}{n}\,\frac{\frac{R^3}{\varrho^3}}{2\,\frac{R^2}{R^2+\varrho^2}}$ besteht also eine $\frac{R^4}{R^4-\varrho^4}$ fache Reibung,

während auf einer Länge von $1-\frac{1}{n}\,\frac{\frac{R^3}{\varrho^3}}{2\,\frac{R^2}{R^2+\varrho^2}}$ keine zusätzliche Reibung verursacht wird.

Die Gesamtreibung ist also

$$= \left[1 - \frac{1}{n} \frac{\frac{R^3}{\varrho^3}}{2\,\frac{R^2}{R^2+\varrho^2}}\right] \cdot 1 + \left[\frac{1}{n} \frac{\frac{R^3}{\varrho^3}}{2\,\frac{R^2}{R^2+\varrho^2}}\right] \cdot \frac{R^4}{R^4-\varrho^4}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} \frac{R(R^2+\varrho^2)}{\varrho^3} \frac{R^4}{R^4-\varrho^4} - 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} \frac{R(R^2+\varrho^2)}{\varrho^3} \cdot \frac{R^4-(R^4-\varrho^4)}{R^4-\varrho^4}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} \frac{R(R^2+\varrho^2)}{\varrho^3} \cdot \frac{\varrho^4}{(R^2+\varrho^2)(R^2-\varrho^2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} \frac{R\varrho}{R^2-\varrho^2}$$

Für eine 1%ige Suspension ist also:

$$\mu_{rel} = 1 + \frac{1}{2n \,.\, 18{,}6} \cdot \frac{R\varrho}{R^2-\varrho^2}$$

Setzt man

$$\frac{1}{2n \,.\, 18{,}6} = \gamma \qquad (47)$$

so erhält man schließlich für eine Suspension von der Konzentration c die Formel:

$$\boxed{\mu_{rel} = 1 + \gamma \frac{R\varrho}{R^2-\varrho^2} \,.\, c} \qquad (48)$$

wobei R = Rohrradius
ϱ = Teilchenradius
c = Ruhe-Konzentration
γ = eine Konstante

γ ist noch unbekannt, da n nicht ohne weiteres bestimmt werden kann. Zur Ermittlung von γ wurde nun folgendermaßen vorgegangen: Es wurde versucht, durch die als • bezeichneten Punkte im graphischen Schema eine Kurve zu legen. Für $\varrho = 0{,}11$ cm wurde eine Ordinate von 1,115 gefunden. Mit diesem einen, aus den Versuchsresultaten entnommenen Zahlenpaar konnte γ durch Einsetzen in Gleichung (48) ermittelt werden:

$$1{,}115 = 1 + \gamma \frac{1{,}394 \,.\, 1{,}1}{1{,}9432-1{,}21}$$

$$\gamma = 0{,}0055$$

Diesen Wert in die gefundene Formel eingesetzt ergibt:

$$\mu_{rel} = 1 + 0{,}0055 \; \frac{R\varrho}{R^2 - \varrho^2} \cdot c$$

$$\boxed{\mu_{rel} = 1 + 0{,}55 \; \frac{R\varrho}{R^2 - \varrho^2} \cdot \varphi} \tag{49}$$

Dieses Resultat kann noch umgeformt werden:

$$\mu_{rel} = 1 + \frac{0{,}55}{\frac{R}{\varrho} - \frac{\varrho}{R}} \cdot \varphi \tag{50}$$

Es wurden für die in Betracht kommenden Radien die relativen Viskositäten mit Hilfe der Gleichung (49) berechnet. Die Ergebnisse sind im graphischen Schema mit □ eingezeichnet. Die dadurch bestimmte Kurve ist also bis auf einen Faktor theoretisch abgeleitet, und sie fügt sich gut in die experimentell gefundenen Punkte.

Die abgeleiteten Formeln (49) und (50) bleiben auch gültig, wenn statt Röhrenradius und Teilchenradius der Röhrendurchmesser und Teilchendurchmesser eingesetzt wird. Die gesuchte Funktion (33) für den Faktor K lautet somit:

$$K = 0{,}55 \; \frac{D_R \cdot D_T}{D_R^2 - D_T^2} \tag{51}$$

oder

$$K = \frac{0{,}55}{\frac{D_R}{D_T} - \frac{D_T}{D_R}} \tag{52}$$

Gelang es bisher nicht, die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes einer heterogenen Flüssigkeit vom Rohrdurchmesser für den Fall formelmäßig zu erfassen, bei dem der Rohrdurchmesser ein Vielfaches des Teilchendurchmessers beträgt, so stellen Gleichungen (49) und (50) die Gesetzmäßigkeit dar, falls nur noch ein Teilchen im Querschnitt der Kapillare Platz hat. Während im ersten Fall die „Viskosität" μ' bei Anwendung der Poiseuille'schen Formel mit abnehmendem Rohrdurchmesser abnimmt, so zeigt sich ein umgekehrtes Verhalten, sobald der Rohrdurchmesser so klein geworden ist, daß Röhrendurchmesser und Teilchendurchmesser von gleicher Größenordnung sind.

Zum Schluß sei noch ein Vergleich angestellt mit dem bekannten Einstein'schen Gesetz. A. Einstein[1]) bestimmte in seiner 1906 erschienenen Dissertation auf theo-

[1]) A. Einstein, Ann. Physik 19, 300 (1906); 34, 592 (1911).

retischem Wege aus den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen die Viskosität μ' einer Suspension starrer Kugeln in einer Flüssigkeit von der Viskosität μ. Er fand:

$$\mu' = \mu\,(1 + 2{,}5\,\varphi)$$

Obwohl unsere Strömungsform anderen Randbedingungen genügt, befolgt sie die im Einstein'schen Gesetz geforderte lineare Abhängigkeit der Viskosität von der Konzentration bis zu großen Konzentrationen, während bei anderen Strömungsarten eine Übereinstimmung nur bei sehr kleinen Konzentrationen gefunden werden konnte. Für $D_R \,/\, D_T = 1{,}117$ wird der Faktor K zu 2,5; in diesem speziellen Fall ergibt sich eine formale Übereinstimmung der Formel (49) mit der Einstein'schen Formel.

Curriculum vitae.

Am 29. Oktober 1922 wurde ich, Jules Züger von Richterswil, in Zug geboren. Ich besuchte die Primarschulen von Zug und Ober-Aegeri, später die Kantonsschule Zug. Nach der Matura im Jahre 1942 ließ ich mich an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz immatrikulieren. Ich belegte hauptsächlich die Vorlesungen und Praktika in Physik, Mathematik, Mineralogie und Physiologie bei den Herren Professoren: Bays, Brasey, Dessauer, Lambossy, Laszt, Müller, Nef, Pfluger, Schuler und Weber. Nachdem ich das Lizentiatsexamen in Physik und Mineralogie bestanden hatte, begann ich im Wintersemester 1945/46 im Physiologischen Institut mit dem experimentellen Teil der vorliegenden Dissertation, die ich unter der Leitung von Prof. Dr. A. Müller ausarbeitete.

Im Selbstverlag Jules Züger, Oberägeri (Zug)